1878.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ET SES

APPLICATIONS AU DESSIN DES MACHINES.

ANGERS, IMPRIMERIE DE COSNIER ET LACHÈSE.

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ET SES

APPLICATIONS AU DESSIN DES MACHINES,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DES ÉCOLES ROYALES D'ARTS ET MÉTIERS,

Par J. Jariez,

CHEF DES TRAVAUX ET DES ÉTUDES, PROFESSEUR DE MÉCANIQUE INDUSTRIELLE, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE A L'ÉCOLE ROYALE D'ARTS ET MÉTIERS D'AIX.

PARIS,
MATHIAS, A LA LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET INDUSTRIELLE, QUAI MALAQUAIS, 15.

MARSEILLE,
LIBRAIRIE DE Mme CAMOIN.

ANGERS,
LIBRAIRIE DE COSNIER ET LACHÈSE.

TOULON,
LIBRAIRIE DE MONGE ET VILLAMUS.

AIX,
LIBRAIRIE DE MAKAIRE ET DELEUIL.

1846.

AVANT-PROPOS.

Cet Abrégé de Géométrie descriptive est destiné à donner aux élèves des Écoles d'arts et métiers, les moyens d'appliquer immédiatement cette science, soit au dessin, soit aux travaux qu'ils sont appelés à exécuter dans leurs ateliers. Pour des praticiens, un cours de Géométrie descriptive doit être essentiellement pratique. J'ai donc cherché, dès le début, à montrer tout le parti qu'on peut tirer des problèmes les plus simples et les plus faciles à résoudre, sur la ligne droite et le plan. Ces problèmes m'ont conduit de suite au tracé des projections des corps. J'ai joint à cette partie du cours les développements nécessaires pour initier les élèves aux méthodes de la projection oblique, si habilement mises en lumières par M. Similien, professeur de dessin à l'École d'Angers. Ce cours, sous ce point de vue, n'est que le complément du sien. Ce qu'il n'a pu dire dans un cours de dessin où il suppose acquises les connaissances de la Géométrie descriptive, je l'ai donné dans ce petit Traité. Avec ce seul secours, les élèves parviendraient difficilement à mettre un corps en projection oblique; mais en étudiant la Géométrie descriptive sous cette forme, ils s'assimileront plus aisément les élégantes méthodes de M. Similien.

Parmi les surfaces courbes, le cylindre, le cône et la sphère, m'ont offert de nombreuses applications de ce qui se fait fréquemment dans les ateliers, et notamment dans celui des tours et modèles, où les tracés empruntent toutes leurs méthodes à la Géométrie. Ces mêmes problèmes m'ont conduit à traiter d'une manière générale les questions qui se rapportent aux ombres des corps, propres ou portées. Mais ce travail, pris isolément, serait tout à fait incomplet, si les élèves n'avaient entre leurs mains le Traité des ombres de M. Similien, où l'auteur a découvert des tracés aussi simples qu'élégants, en donnant au rayon lumineux une direction constante et particulière, qui permet de simplifier beaucoup les méthodes générales.

Enfin, l'art de travailler le bois étant un de ceux enseignés dans les Écoles, j'ai cru devoir joindre aux principes sur les ombres, quelques principes de charpente, particulièrement appliqués aux machines.

Cette disposition et ce choix des matières m'ont paru propres à faire comprendre aux élèves l'usage qu'ils peuvent faire de la Géométrie descriptive dans leurs travaux graphiques et pratiques. En réunissant ainsi dans le plus petit cadre possible le plus grand nombre de notions utiles et pratiques sur cette science, j'ai cru satisfaire à un besoin généralement senti dans nos Écoles, de ne plus faire apprendre la Géométrie descriptive isolément, mais de la rattacher, par ses applications, au Cours de dessin et à l'enseignement pratique. Je recevrai toutefois à cet égard, avec la plus vive reconnaissance, toutes les observations qui pourront m'éclairer sur la meilleure marche à imprimer aux études dans nos Écoles. Je serai toujours heureux de joindre à l'expérience que j'y ai déjà acquise, les lumières des personnes qui, comme moi, ont consacré leur vie à cette œuvre éminemment utile et attrayante, l'enseignement de la jeunesse.

FAUTES ESSENTIELLES A CORRIGER.

Page 12, § 8.	dans le titre du paragraphe, à la place des lettres, V, H, P, *substituez* v, h, p.
Page 15, ligne 13.	le point p', *lisez* le point p''.
idem ligne 26.	les projections des points v', h', fig. 8, *lisez* les projections v' et h' d'un point, fig. 8.
Page 21, ligne 2.	$t\,l'$, lisez $t\,l$.
Page 37, ligne 19.	A décrit, *lisez* a décrit.
Page 42, ligne 34.	situé sera $g\,o$ sur, *lisez* situé sur $g\,o$, sera.
Page 44, ligne 13.	bh, bv, lisez $b\,h$, $b'v$.
Page 51, ligne 29.	uv, lisez $u\,x$.
Page 54, ligne 32.	$a\,k$, *lisez* vertical $o\,k$.
idem, ligne 33.	ok, lisez $o\,p$.
Page 61, ligne 21.	dont le palier, *lisez* donc le palier.
Page 62, ligne 19.	longueur, *lisez* profondeur.
Page 72, ligne 23.	du plan, *lisez* du point.
Page 74, ligne 3.	$v'g'$, lisez $v\,g'$.
Page 79, ligne 5.	*or*, ne doit pas être en italiques.
idem ligne 23.	kq, lisez $k'\,q$.
Page 85, ligne 23.	$hh'a$, et a, lisez $h\,h'\,a_1$, et a_1.
Page 88, ligne 12.	eq, lisez $r\,q$.
Page 89, ligne 11.	eq, lisez rq.
Page 90. ligne 17.	*supprimez* le mot : sur.
Page 96, ligne 19.	$n'\,d''$, lisez $m'\,d''$.
Page 99, ligne 28.	$q\,z$, lisez $q\,r$.
Page 114, ligne 25.	mettre un point après le mot : *surface.*
idem, ligne 27.	mettre une virgule après le mot : *directrices.*
Page 115, ligne 3.	mettre une virgule après le mot : *plan.*
Page 117, ligne 31	$c'\,b'$, lisez $c'\,b''$.
Page 119, ligne 1.	$i'\,u''$, lisez $i''\,u''$.
Page 142, ligne 23	autour, *lisez* au tour.
Page 143, ligne 28.	au point, *lisez* aux points.
Page 144, ligne 32.	p,q, lisez $p\;q$.
Page 154, ligne 8.	en cercle, *lisez* un cercle.

Page 154, ligne 30. petit, *lisez* demi-petit.

Page 166, ligne 16. Les deux branches de la courbe sont tangentes en k'. Il est visible, *lisez* les deux branches de la courbe ont pour tangentes en k' les lignes op, qr. Il est visible,

FAUTES A CORRIGER SUR LES PLANCHES.

Figure 6. mettre la lettre p à l'intersection des lignes $v'h$ et LT.

Figure 26. mettre la lettre t au point de concours des trois lignes de la figure rabattue.

Figure 58. mettre la lettre p à l'intersection de vh avec la ligne de terre.

Figure 61. mettre la lettre k'' au point situé sur gg''', et la p' à l'intersection de vh et de lt.

Figure 66. mettre la lettre g à l'intersection de vh et de $c'g'$.

Figure 66 et 67. la droite qui passe par le point o et qui ne passe pas par le point v, est inutile.

Figure 83. mettre p' à la place de q', situés près de f' et mettre r' à la naissance du petit arc de cercle sur la ligne $o'p'$.

Figure 84. mettre les lettres v et v'', qui sont voisines, aux points symétriques par rapport à rr', sur la même horizontale.

Figure 93. mettre la lettre i à la parallèle qi à ph.

Figure 99. mettre la lettre p à l'intersection de vh et de la ligne de terre.

Figure 105 mettre la lettre i au point situé sur ok.

Figure 106. mettre h à la place de v dans le plan horizontal.

Figure 123. mettre la lettre q à l'extrémité de l'horizontale du point h'.

Figure 132. mettre la lettre g à la place de q.

Figure 152. mettre g à la place de q et mettre q au point situé entre o et k (le point g est situé sur $a'b'$).

Figure 166. joindre le point b et le point s. mettre k' à la rencontre de la circonférence et de $b'k$.

Comme ce cours de géométrie descriptive est destiné aux élèves des Ecoles Royales d'Arts et Métiers, et que ces élèves ont entre les mains la Géométrie de Bobillier, nous admettrons comme démontrés tous les théorèmes qui composent cet ouvrage, et nous réunirons ici en groupe les énoncés de la plus grande partie des théorêmes qui sont relatifs aux courbes et à la la géométrie de l'espace, en nous bornant à signaler le numéro de la page où se trouve placée la démonstration de chacun de ces théorèmes. Ces énoncés portent un numéro d'ordre, auquel nous renverrons, lorsqu'il y aura lieu, dans la suite du cours.

DES COURBES.

1. Une courbe est *plane* lorsque tous ses éléments sont situés dans un même plan.

2. Une courbe est à *double courbure* lorsque tous ses éléments ne sont pas situés dans un même plan.

3. On appelle *tangente* à une courbe, toute droite qui unit deux points infiniment voisins de cette courbe. La distance de ces points étant inappréciable à l'œil, on les considère comme se confondant en un seul point, qui prend le nom de *point de contact*.

4. Une courbe pouvant aussi être supposée formée d'un nombre infini de côtés infiniment petits, on appelle aussi *tangente* à cette courbe, le prolongement de l'un de ces petits éléments linéaires.

5. Une *tangente* peut couper une courbe en d'autres points que son point de contact, excepté quand la courbe est convexe.

6. On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente menée au point de contact.

7. On appelle *ordonnées* d'une courbe les perpendiculaires abaissées des différents points de cette courbe sur une droite fixe donnée de position.

8. On appelle *sous-tangente* et *sous-normale* les distances du pied de l'ordonnée aux points où la tangente et la normale rencontrent la droite fixe.

9. Une *asymptote* d'une courbe est une ligne droite qui s'approche constamment de la courbe sans jamais la rencontrer.

10. L'ordonnée d'une courbe prise par rapport à une de ses tangentes diminue jusqu'au point de contact où elle est nulle. La même propriété subsistant pour une courbe par rapport à son asymptote, on peut dire qu'une asymptote est tangente à la courbe à l'infini.

11. On dit qu'une courbe tourne, en un point, sa *concavité* ou sa *convexité* vers une droite, selon que l'ordonnée de ce point est plus grande ou plus petite que la demi-somme des ordonnées infiniment voisines, et équidistantes.

12. Un point *d'inflexion* est celui où la concavité d'une courbe se change en convexité, ou réciproquement.

13. Un point *multiple* est celui où viennent se croiser deux ou plusieurs branches d'une même courbe.

14. Un point de *rebroussement* est celui où deux branches d'une même courbe viennent se terminer brusquement. La tangente de ce point est commune aux deux branches.

15. On appelle *axe* d'une courbe toute droite qui divise en deux parties égales les ordonnées qui lui sont perpendiculaires.

16. On appelle *centre* d'une courbe un point tel que toute corde de la courbe qui le contient, est divisée à ce point en deux parties égales.

17. Un axe est *transverse* quand il traverse la courbe en un ou plusieurs points. Ces points s'appellent *sommets*. Un axe est *non-transverse* quand il ne rencontre pas la courbe.

18. La perpendiculaire menée à un axe par le sommet est une tangente.

19. Les tangentes tirées aux extrémités d'une droite qui passe par le centre sont parallèles.

20. Deux lignes courbes sont *semblables* lorsque, ayant inscrit arbitrairement dans l'une un polygone, on peut toujours inscrire dans l'autre un polygone semblable.

21. Les propriétés des figures polygonales semblables s'appliquent aux courbes semblables.

22. La *développante* d'une courbe est une seconde courbe dont toutes les normales sont tangentes à la première.

23. Construire la développante d'une courbe. (p. 120).

24. L'*ellipse* est une courbe telle que la somme des distances

d'un de ses points à deux points fixes, nommés *foyers*, est toujours constante.

25. L'ellipse a deux axes transverses rectangulaires. (p. 122).

26. La somme des rayons recteurs d'un point quelconque de l'ellipse est égale au grand axe. (p. 122).

27. Décrire une ellipse. (p. 122 et 123).

28. La tangente fait avec les rayons vecteurs du point de contact des angles égaux. (p. 123).

29. Mener une tangente à l'ellipse : 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point pris hors de la courbe; 3° parallèlement à une droite donnée. (p. 123 et 124).

30. Les projections des foyers sur une tangente quelconque sont situées sur la circonférence qui a pour diamètre le grand axe. (p. 124).

31. Lorsqu'on décrit un cercle sur le grand axe comme diamètre, les ordonnées au grand axe, qui se correspondent dans l'ellipse et dans le cercle, sont entr'elles dans le rapport des deux axes. (p. 124).

32. L'aire de l'ellipse est égale au rapport de la circonférence au diamètre multiplié par le produit de ses demi-axes. (p. 125).

33. L'*hyperbole* est une courbe telle que la différence des distances d'un de ses points à deux points fixes, nommés *foyers*, est toujours constante.

34. L'hyperbole a deux axes rectangulaires. (p. 125).

35. La différence des rayons vecteurs d'un point est égale à l'axe transverse. (p. 126).

36. Décrire une hyperbole par points, connaissant les foyers et l'axe transverse. (p. 126).

37. La tangente est la bissextrice de l'angle des rayons vecteurs. (p. 126).

38. Mener une tangente à l'hyperbole : 1° par un point pris sur la courbe; 2° par un point pris hors de la courbe; 3° parallèlement à une droite donnée. (p. 127).

39. Les projections des foyers sur une tangente quelconque sont situées sur une circonférence qui a pour diamètre l'axe transverse. (p. 127).

40. L'hyperbole a deux asymptotes. (p. 127).

41. Construire une hyperbole connaissant ses asymptotes et un point.

42. La *parabole* est une courbe dont tous les points sont également éloignés d'un point fixe, nommé *foyer*, et d'une ligne fixe nommée *directrice*.

43. La parabole a pour axe la perpendiculaire tirée du foyer sur la directrice. (p. 128).

44. Toute parallèle à l'axe ne coupe la parabole qu'en un seul point. (p. 128).

45. Décrire par points une parabole dont le foyer et la directrice sont donnés. (p. 128).

46. La tangente est également inclinée sur l'axe et le rayon vecteur du point de contact. (p. 128).

47. Mener une tangente à la parabole : 1° par un point pris sur la courbe ; 2° par un point pris hors de la courbe ; 3° parallèlement à une droite donnée. (p. 128).

48. La projection du foyer sur une tangente quelconque est située sur la tangente du sommet. (p. 129).

Corol. 1. Le sommet est le milieu de la sous-tangente.

Corol. 2. La sous-normale est égale à la moitié du paramètre.

49. L'aire d'un segment parabolique est égale aux deux tiers du rectangle de même base et de même hauteur. (p. 129).

50. La *cycloïde* est une courbe décrite par un point du plan d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une de ses tangentes. — La cycloïde est *ordinaire*, si le point décrivant est situé sur la circonférence génératrice ; elle est *rallongée*, si le point lui est intérieur, et *raccourcie* s'il est extérieur. La tangente porte le nom de *directrice*.

51. Décrire une cycloïde ordinaire rallongée ou raccourcie. (p. 136).

52. Construire la tangente en un point d'une cycloïde. (p. 137).

53. L'*épicycloïde* est la courbe décrite par un point du plan d'un cercle qui roule, sans glisser, sur un autre cercle fixe. L'épicycloïde est *ordinaire*, *rallongée* ou *raccourcie*, selon que le point décrivant est situé sur la circonférence, au dedans, ou au dehors. On dit aussi que cette ligne est *interne* ou *externe*, suivant que le cercle fixe comprend ou ne comprend pas le cercle mobile.

54. Décrire une épicycloïde ordinaire, rallongée ou raccourcie. (p. 138).

55. Quand un cercle roule intérieurement sur un cercle de rayon double, les épicycloïdes ordinaires sont des diamètres du cercle fixe, et les épicycloïdes rallongées et raccourcies sont des ellipses. (p. 138).

56. Construire la tangente en un point de l'épicycloïde. (p. 139).

THÉORÈMES RELATIFS A LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE.

57. Une droite ne peut être située en partie dans un plan et en partie au dehors. (p. 142).

58. Une droite ne peut rencontrer un plan qu'en un seul point. (p. 142).

59. Deux plans qui ont trois points communs, non situés en ligne droite, coïncident dans toute leur étendue. (p. 142).

Corol. 1. Par trois points situés en ligne droite, on peut faire passer une infinité de plans.

Corol. 2. On peut mener en chaque point d'une droite une infinité de perpendiculaires.

Corol. 3 Par un point de l'espace on ne peut mener à une droite qu'une seule parallèle.

60. La position d'un plan est déterminée par deux droites qui se coupent, par trois points, par une droite et un point, par deux parallèles. (p. 143).

61. L'intersection de deux plans qui se coupent est une droite. (p. 143).

Corol. L'intersection de trois plans est un point.

62. Une droite est dite *perpendiculaire à un plan* lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les droites menées par son pied dans ce plan. (p. 143).

63. Il suffit qu'une droite soit perpendiculaire à deux droites issues de son pied dans un plan, pour être perpendiculaire à ce plan. (p. 144).

64. Par un point pris hors d'un plan, ou dans un plan, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à ce plan. (p. 144).

65. En un point pris sur une droite ou hors d'une droite, on ne peut mener qu'un plan perpendiculaire à cette droite. (p. 145).

66. Les intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles. (p. 146).

67. Les parallèles comprises entre deux plans parallèles sont égales. (p. 146).

68. Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles. (p. 147).

69. Toute droite perpendiculaire à un plan est aussi perpendiculaire au plan parallèle. (p. 147).

Corol. Par un point donné on ne peut faire passer qu'un plan parallèle à un plan donné.

70. Tous les plans qui passent par une droite parallèle à un plan, rencontrent ce plan suivant des lignes parallèles à cette droite et parallèles entre elles. (p. 147).

Corol. 1. Si un plan et une droite sont parallèles, toute parallèle à la droite issue d'un point du plan, est située dans ce plan.

Corol. 2. Une droite parallèle à la fois à deux plans qui se coupent, est parallèle à leur intersection.

71. Toute droite parallèle à une droite située dans un plan, est parallèle à ce plan. (p. 147).

Corol. 1. Une droite et un plan perpendiculaires à la même droite sont parallèles.

Corol. 2. Le lieu des parallèles menées à un plan par un point quelconque, est un plan parallèle au premier.

72. Si deux plans qui se coupent passent par deux parallèles, leur intersection est parallèle à ces droites. (p. 148).

73. Deux angles ont des plans parallèles et sont égaux, lorsque leurs côtés sont parallèles et de même sens. (p. 148).

74. Si une droite est perpendiculaire à un plan, sa parallèle est aussi perpendiculaire à ce plan. (p. 148).

75. Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles. (p. 148).

76. L'inclinaison d'une droite sur un plan, est mesurée par l'angle qu'elle forme avec sa projection sur ce plan. (p. 151).

77. Tout plan conduit suivant une droite perpendiculaire à un plan, est aussi perpendiculaire à ce plan. *Ou bien* : tout plan perpendiculaire à une droite située dans un plan est aussi perpendiculaire à ce plan. (p. 152).

78. Si deux plans sont perpendiculaires, toute droite tirée dans l'un d'eux perpendiculairement à l'intersection, est perpendiculaire à l'autre plan. (p. 152).

Corol. Lorsque deux plans sont perpendiculaires, et que d'un point pris dans l'un d'eux on mène à l'autre une perpendiculaire, elle se trouve tout entière dans le premier plan.

79. Lorsque deux plans qui se coupent sont perpendiculaires à un même plan, leur intersection est aussi perpendiculaire à ce plan. (p. 152).

80. Un plan et une droite perpendiculaires à un même plan sont parallèles. (p. 152).

81. Par une droite non perpendiculaire à un plan on peut toujours faire passer un plan perpendiculaire au premier, mais on ne peut en faire passer qu'un. (p. 152).

82. Deux plans sont parallèles lorsque, étant perpendiculaires au même plan, ils passent par deux droites parallèles et non perpendiculaires à ce plan. (p. 153).

83. Les perpendiculaires abaissées sur les faces d'un dièdre

d'un point intérieur, forment un angle dont le plan est perpendiculaire à l'arête, et qui est le supplément de ce dièdre. (p. 153).

84. La perpendiculaire commune à deux droites, non situées dans le même plan, est leur plus courte distance. (p. 153).

85. Tout grand cercle divise la sphère en deux parties égales. (p. 180).

86. Toute section plane de la sphère est un cercle. (p. 181).

Corol. 1. Par deux points de la surface sphérique, on peut toujours faire passer une circonférence de grand cercle.

Corol. 2. Par trois points de la surface sphérique, on peut toujours faire passer une circonférence de petit cercle.

87. Tout plan perpendiculaire à l'extrémité d'un rayon est tangent à la sphère. (p. 181).

Corol. 1. Toute droite tirée dans le plan tangent par le point de contact, est tangente à la sphère.

Corol. 2. Deux tangentes à la sphère, issues d'un même point, et terminées à leur point de contact, sont égales.

88. Le plus court chemin d'un point à un autre, sur la surface sphérique, est l'arc de grand cercle qui unit ces deux points. (p. 183).

89. Tout cylindre oblique, à base circulaire, peut être coupé suivant un cercle par un plan non parallèle aux bases. (p. 183).

90. Dans un cylindre droit circulaire, toute section oblique aux bases est une ellipse. (p. 184).

91. Tout cône circulaire oblique peut être coupé suivant un cercle par un plan non parallèle aux bases. (p. 185).

92. Dans un cône droit circulaire, toute section, qui ne passe pas par le sommet, est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

COURS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

ET SES

APPLICATIONS AU DESSIN DES MACHINES,

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES ÉCOLES ROYALES D'ARTS ET MÉTIERS.

PRÉLIMINAIRES.

§ 1. *But de la géométrie descriptive.* — Pour donner une idée plus nette du but de la géométrie descriptive, proposons-nous de résoudre une question fort simple de la géométrie de l'espace : *Mener par une droite donnée un plan parallèle à une autre droite donnée.* La géométrie nous apprend (71) qu'un plan est parallèle à une droite, lorsqu'il contient une parallèle à cette droite. Si donc par un point *p* *fig.* 1 de la première droite *a b*, nous menons à l'autre *c d* une parallèle *p q*, le plan *m n*, déterminé par ces deux droites qui se coupent, sera le plan demandé.

Quoique la question soit maintenant résolue, néanmoins, on comprend qu'il reste à réaliser physiquement le résultat obtenu, c'est-à-dire à mener une parallèle à une droite, et à construire un plan qui passe par deux droites qui se coupent. Dans la géométrie plane, toutes les constructions s'effectuent sur un plan, et sont rigoureusement déduites les unes des autres, en employant le seul secours de la règle et du compas. Mais ici, tout ne se passe pas dans le même plan, et quoique, pour nous faire comprendre, nous ayons figuré un plan *m n* pour représenter celui qui passe par les deux droites *a b* et *p q*, on conçoit aisément qu'il n'y a rien de réel dans cette représentation, et que la question n'est pas résolue physiquement, en ce sens que nous ne saurions reproduire le plan *m n* dans l'espace et le rendre distinct de la droite *c d*.

La géométrie descriptive donne les moyens, à l'aide d'un dessin fait sur une surface plane, de reproduire ce plan quand on le veut, et fait trouver les éléments qui doivent le constituer.

La géométrie descriptive a donc pour but de reproduire sur un plan toutes les constructions que l'on est susceptible d'effectuer sur les corps, dans l'espace.

§ 2. *Déterminer la position d'un point.* — On dit qu'*un point est rapporté à des plans, des droites, ou des points,* quand on détermine la position de ce point par des distances supposées connues, à ces plans, à ces droites, à ces points.

§ 3. *Déterminer la position d'un point dans un plan.* — Dans un plan, on rapporte un point à deux droites qui se coupent, et, le plus souvent, ces droites sont rectangulaires. La position d'un point est en effet déterminée, lorsqu'on connaît ses distances à deux axes fixes et donnés de position. Si l'on dit, par exemple, qu'un point est placé à une distance de $0^m\,015$ de l'axe $x\,x'$ *fig.* 2, et à $0^m\,02$ de l'axe $y\,y'$, ce point ne pourra se trouver qu'à la rencontre des lignes $m\,m'$, $m''\,m'''$, $m\,m'''$, $m'\,m''$, menées parallèlement aux axes, les deux premières à $0^m\,015$ de $x\,x'$, les deux autres à $0^m\,02$ de $y\,y'$, ces lignes se coupent aux points m, m', m'', m''' qui satisfont à la question.

Pour distinguer parmi ces quatre points celui qui répond seul à la question, il faut encore ajouter aux conditions primitives, celle d'être placé à droite ou à gauche de $y\,y'$, au-dessus ou au-dessous de $x\,x'$. Le point se trouve alors parfaitement déterminé.

§ 4. *Déterminer la position d'un point dans l'espace.* —

Lorsqu'on veut fixer la position d'un point dans l'espace, on le rapporte à trois plans rectangulaires xx', yy', zz', *fig.* 3, en donnant ses distances à chacun de ces trois plans. En effet, si le point cherché est à une distance donnée mx du plan xx', il fera partie des points des plans mm'', $m^{v}m^{vi}$ menés parallèlement à xx', et à une distance mx de ce plan. Si ce point est aussi à une distance donnée my du plan yy', il fera partie des points des plans mm^{iv}, m''' m^{vi} menés parallèlement à yy', et à une distance my de ce plan. Donc, ce point ne pourra plus être confondu qu'avec les points communs à ces quatre plans, c'est-à-dire avec les points des 4 lignes mm', m'' m''', $m^{iv}m^{v}$, m^{vi} m^{vii}. Enfin, si ce point est aussi à une distance mz de zz', il fera partie des 2 plans mm^{vii}, $m'm^{vi}$, et se trouvera être l'un des 8 points de la rencontre de ces plans et des 4 droites précédentes. Ces points sont m, m', m'', m''', m^{iv}, m^{v}, m^{vi}, m^{vii}.

Pour distinguer le point cherché de ces huit points qui satisfont à la condition d'être distants de la quantité mx de xx', de la quantité my de yy', et de la quantité mz de zz', il faut ajouter à cette condition la position du point par rapport à chacun de ces plans : Par exemple, dire que le point est au-dessus de xx', à droite de yy', et en avant de zz'. Alors le point m satisfera complétement à la question.

§ 5. *Déterminer la position d'un point à l'aide de ses projections sur deux plans quelconques.* — Ce n'est point ainsi que nous déterminerons à l'avenir la position d'un point. Nous le ferons à l'aide de deux plans seulement, mais nous nous donnerons les projections de ce point sur ces deux plans. Nous avons vu en géométrie que ces projections ne sont autre chose que les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point sur les deux plans. Soient, en effet h et v *fig.* 4, les projections d'un point sur les deux plans L H et L V rectangulaires. Si de ces points on élève les perpendiculaires hm et vm aux deux plans L H et L V, elles devront contenir le point cherché. Ce point se trouvera donc à la rencontre de ces deux lignes en m. *La position d'un point de* *l'espace est donc déterminée par ses projections sur deux plans non parallèles.*

§ 6. *Plans de projection, ligne de terre, lignes projetantes.* — Les deux plans L H et L V se nomment *plans de projection.* Le plus souvent l'un de ces plans est choisi *horizontal*, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction du fil à plomb; l'autre est *vertical*, c'est-à-dire perpendiculaire au plan horizontal. Nous désignerons par H le plan horizontal et par V le plan vertical.

La ligne d'intersection L T de ces plans porte le nom de *ligne de terre.*

Nous emploierons souvent un troisième plan de projetion perpendiculaire aux deux premiers; nous le désignerons par P.

Les perpendiculaires mh et mv qui servent à projeter un point m de l'espace, ou qui, élevées de ses deux projections sur les plans respectifs H et V, servent à déterminer le point m, se nomment les *lignes projetantes* de ce point.

§ 7. *Si des projections* H *et* V *d'un point* M *de l'espace fig.* 5, *on abaisse des perpendiculaires* H P et V P *sur la ligne de terre, dans chacun des deux plans, elles se rencontreront sur cette ligne de terre.* — Soient h et v les projections d'un point m de l'espace. Par les deux lignes projetantes mh et mv faisons passer un plan qui coupera la ligne de terre en p, et sera perpendiculaire à cette ligne (77 et 79). Réciproquement la ligne L T est perpendiculaire à ce plan, et par conséquent aux lignes hp, vp, qui passent par son pied dans ce plan. Donc les perpendiculaires abaissées des points v et h sur la ligne de terre, se coupent au même point p.

§ 8. *Réciproquement, si des deux points* H *et* V *pris, l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, on abaisse les perpendiculaires* H P *et* V P *sur la ligne de terre, et si ces deux perpendiculaires tombent au même point* P, *les points* H *et* V, *seront les projections d'un même point de l'espace.* — En effet, la ligne L T étant perpendiculaire aux deux droites hp, vp, est perpendiculaire à leur plan (63), ainsi que les plans V et H (77). Donc les perpendiculaires *hm* et *vm* au plan H et au plan V seront situées dans le plan *vh* (78 corol.) et se rencontreront en un certain point *m* qui aura alors pour projections les points *h* et *v*.

Il suit de ce paragraphe et du précédent que, *pour que deux points situés, l'un dans le plan horizontal, l'autre dans le plan vertical, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que les perpendiculaires abaissées respectivement de chacun de ces points sur la ligne de terre, se coupent au même point.*

§ 9. *Rabattement des plans de projection l'un sur l'autre.* — Jusqu'à présent nous avons figuré les plans de projection tels qu'on les voit dans l'espace, et nous avons également figuré les lignes projetantes d'un point qui n'auraient pas en réalité les dimensions qu'elles ont sur la figure. Mais ce que nous venons d'effectuer, pour ainsi dire par la pensée, nous pouvons en conserver la trace sur un dessin plan, où toutes les lignes auront leurs dimensions naturelles.

C'est même ainsi que nous opérerons toujours par la suite. Nous effectuerons dans l'espace, par la pensée, toutes les constructions qui nous seront nécessaires pour résoudre une question; puis nous traduirons ces constructions sur un dessin plan, d'une manière analogue à celle que nous allons employer.

Pour ramener sur un plan toutes les constructions de l'espace, on fait tourner le plan vertical autour de la ligne de terre comme charnière, jusqu'à ce qu'il vienne se confondre avec le plan horizontal. De cette manière, comme les deux plans de projection partagent l'espace en quatre régions, formées par les parties supérieure et inférieure du plan vertical, et par les parties antérieure et postérieure du plan horizontal, lorsque ces deux plans se sont rabattus l'un sur l'autre, on convient que la partie supérieure du plan V se rabat sur la partie postérieure du plan H, et que la partie inférieure du plan V vient s'appliquer sur la partie antérieure du plan H.

Il est évident que les mêmes parties de ces deux plans se recouvriront également, si l'on fait tourner le plan H en le rabattant sur le plan V.

La figure 6 fait comprendre ce rabattement.

§ 10. *Projections d'un point dans le rabattement des plans de projection.* — *Conséquences.* — Il est aisé de voir ce que deviennent les projections d'un point de l'espace dans le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre. En effet, dans le mouvement du plan V autour de la charnière L T, la ligne vp ne cesse pas d'être perpendiculaire à cette charnière; elle vient donc se confondre, dans le rabattement en pv', avec la ligne ph qui est aussi perpendiculaire à la charnière.

D'où il suit que, *dans le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre, les deux projections d'un même point de l'espace se trouvent placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre.*

D'où il suit encore que, *pour que deux points, dans le rabattement des plans de projection, soient les projections d'un même point de l'espace, il faut et il suffit que la ligne qui joint ces deux points soit perpendiculaire à la ligne de terre.*

§ 11. *Définir une épure.* — On appelle *épure* le dessin plan qui représente le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre, et de tout ce qu'ils contiennent.

§ 12. *Distances d'un point aux plans de projection.* — Les lignes mh et mv *fig.* 6 mesurent les distances du point m, la première au plan H, la seconde au plan V; ces lignes sont respectivement égales à leurs parallèles pv et ph, ou aux lignes pv' et ph dans le rabattement. Donc, *la distance d'un point à l'un des plans de projection est mesurée par la distance de sa projection sur l'autre à la ligne de terre.*

§ 13. *Projections d'un point dans toutes ses positions.* — Les projections d'un point changent de position par rapport à la ligne de terre, suivant qu'il est placé au-dessus ou au-dessous du plan H, devant ou derrière le plan V. La *fig.* 7 fait voir ce que deviennent les projections d'un point successivement placé dans les quatre angles formés par les plans de projection, dans le rabattement de ces derniers, et la figure 8 donne ces mêmes projections figurées sur l'épure.

Le point p *fig.* 7 et 8 placé au-dessus du plan H et en avant du plan V, aura, dans le rabattement, sa projection verticale v placée au-dessus de la ligne de terre, et sa projection horizontale h au-dessous. Le point p', également placé au-dessus du plan H, aura aussi sa projection verticale v' au-dessus de la ligne de terre; mais comme il est derrière le plan V, sa projection horizontale h' paraîtra, dans le rabattement, être située dans la partie supérieure du plan vertical, et elle sera au-dessus de la ligne de terre, du même côté que la projection verticale v'. Le point p'' situé au-dessous du plan H, aura sa projection verticale v'' au-dessous de la ligne de terre, dans le rabattement, et cette projection placée dans la partie inférieure du plan vertical paraîtra être dans le plan horizontal. Le contraire aura lieu pour la projection horizontale, qui étant située dans la partie postérieure du plan horizontal, paraîtra être dans le plan vertical, et sera située au-dessus de la ligne de terre. On voit enfin que le point p''' aura ses deux projections placées au-dessous de la ligne de terre en h''' et v'''.

On conclut de là que la position d'un point dans l'un des 4 angles étant assignée, la position des projections du point par rapport à la ligne de terre se trouve déterminée.

Réciproquement, les projections des points v' h' *fig.* 8, étant données, il est facile de reconnaître à laquelle des quatre régions ce point appartient. On fera pour cela le raisonnement suivant: Ce point a sa projection verticale placée au-dessus de la ligne de terre, donc il est situé au-dessus du plan horizontal. Il ne reste donc plus qu'à déterminer s'il est en avant ou en arrière du plan vertical. Or, sa projection horizontale est située au-dessus de la ligne de terre, ce qui est le caractère d'un point placé derrière le plan vertical. Donc enfin, ce point est placé entre la partie supérieure du plan vertical et la partie postérieure du plan horizontal.

Un point m placé dans le plan horizontal, est à lui-même sa projection horizontale, et sa projection verticale m' est située sur la ligne de terre, car la perpendiculaire mm' est située dans le plan H (78 corol.). — Un point n, situé dans le plan vertical, est à lui-même sa projection verticale, et sa projection horizontale est située sur la ligne de terre. Un point q, situé sur la ligne de terre, est à lui-même sa projection horizontale et sa projection verticale (*fig.* 7 et 8).

§ 14. *Projection d'une ligne, d'une ligne droite, plan projetant.* — Une ligne étant composée de points, la projection d'une ligne est la ligne continue qui unit les projections de tous les points de la première, *fig.* 9.

La projection d'une ligne droite sur un plan est une ligne droite; car toutes les perpendiculaires abaissées des points de la droite sur ce plan, seraient comprises dans le plan perpendiculaire au premier mené par la droite (81), et tomberaient sur l'intersection de ces deux plans (*fig.* 10).

Pour projeter une droite sur un plan, il suffira donc d'abaisser d'un de ses points une perpendiculaire sur ce plan, de faire passer un plan par les deux droites, et de déterminer l'intersection des deux plans.

Le plan qui sert à projeter une droite se nomme *plan projetant.*

§ 15. *Une droite de l'espace est déterminée, lorsqu'on connaît ses projections sur les plans H et V.* — En effet, soient $a\,b$ et $a'\,b'$, *fig.* 11, les projections d'une droite sur les plans H et V. Si par ces droites on élève des plans respectivement perpendiculaires aux plans H et V, ils contiendront tous deux la droite de l'espace, et leur intersection AB déterminera entièrement sa position (61).

Les projections de la droite prennent la position $a\,b$ et $a'\,b'$, dans le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre *fig.* 12.

§ 16. *Projections d'une droite dans toutes ses positions.* — Une parallèle au plan horizontal porte le nom de *horizontale.* Une parallèle au plan vertical ne porte pas le nom de *verti-*

cale. Une *verticale* est une ligne perpendiculaire au plan horizontal ; elle est aussi parallèle au plan vertical (80). Une perpendiculaire au plan vertical est aussi une horizontale.

Lorsqu'une droite AB est horizontale *fig.* 13, sa projection horizontale *ab* occupe une position quelconque par rapport à la ligne de terre, mais cette projection est parallèle à la ligne horizontale elle-même (70). Sa projection verticale est parallèle à la ligne de terre, car cette horizontale étant parallèle à sa projection horizontale, le plan qui la projette verticalement et le plan horizontal, passent alors par deux lignes parallèles AB et *ab*, et sont parallèles (82) ; leurs intersections par le plan vertical sont donc parallèles (66) ; donc la projection verticale est parallèle à la ligne de terre.

On ferait voir également que la projection verticale d'une parallèle au plan vertical est une droite quelconque, et que sa projection horizontale est une parallèle à la ligne de terre.

Lorsqu'une droite est parallèle à la ligne de terre, elle est parallèle à chacun des plans H et V (71) ; donc ces plans projetants coupent les plans V et H suivant des parallèles à elle-même, ou à la ligne de terre (70). Donc, lorsqu'une ligne est parallèle à la ligne de terre, ses projections sont parallèles à cette ligne.

Lorsqu'une droite *ab* (*fig.* 14) est perpendiculaire au plan H, sa projection horizontale *b* est un point, qui est le pied de cette verticale dans le plan ; et sa projection verticale *a'b'* est une perpendiculaire à la ligne de terre, car son plan projetant est à la fois perpendiculaire aux deux plans H et V (77) ; donc il est perpendiculaire à la ligne de terre (79). Réciproquement, cette ligne est perpendiculaire au même plan projetant, et par conséquent perpendiculaire à toute droite comme la projection verticale de la verticale, qui passe par son pied dans le plan.

On ferait voir également que la projection verticale d'une droite perpendiculaire au plan V, est un point, et que sa projection horizontale est une perpendiculaire à la ligne de terre.

La figure 15 donne sur l'épure, c'est-à-dire quand les plans de projections sont rabattus l'un sur l'autre, les projections des lignes que nous venons de considérer, c'est-à-dire d'une parallèle au plan horizontal, d'une parallèle au plan vertical, d'une parallèle à la ligne de terre, d'une perpendiculaire au plan horizontal, et d'une perpendiculaire au plan vertical.

Lorsqu'une ligne *ab*, *fig.* 16, est située dans l'un des plans de projection, elle est à elle-même sa projection sur ce plan, et sa projection sur l'autre est la ligne de terre; car son plan projetant est alors le plan de projection dans lequel elle est située.

Lorsqu'une ligne rencontre la ligne de terre, ses projections ont la position de la *fig.* 17.

Enfin, une ligne AB peut être située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, *fig.* 18. Dans ce cas, ses projections seront toutes deux perpendiculaires à la ligne de terre, et au même point de cette ligne; mais ces projections ne suffisent plus pour déterminer la position de la droite dans l'espace, car, pour que la droite soit déterminée, il faut que ses deux plans de projection se coupent, et ici ils se confondent. Il faut donc d'autres conditions pour fixer sa position dans l'espace. Il faudrait, par exemple, ou donner deux points de la droite par leurs projections, ou un point et l'inclinaison de la ligne sur l'un des plans H ou V, ou bien enfin changer de plan vertical de projection, ou, ce qui est la même chose, en d'autres termes, se donner la projection *a'' b''* de la droite sur un autre plan vertical de projection tel que P, pour lequel la nouvelle ligne de terre serait *t t'*, et qu'on suppose ici également rabattu sur le plan horizontal. Les projections de cette droite seraient alors *a b*, *a'' b''*, et elle serait parfaitement déterminée.

§ 17. *Déterminer la position d'une courbe dans l'espace; — courbe parallèle à l'un des plans de projection.* — Nous avons défini, § 14, la projection d'une ligne, droite ou courbe, sur un plan. Une courbe dans l'espace est déterminée, comme l'est une ligne droite, par ses deux projections sur les plans V et H. En effet, les perpendiculaires élevées au plan H, des divers points de la projection horizontale, forment une surface qui doit contenir la courbe de l'espace, puisque, pour obtenir cette projection, il a fallu, des points de la courbe, abaisser les mêmes perpendiculaires sur le plan H. De même les perpendiculaires élevées au plan V des points de la projection verticale de la courbe, formeront une surface qui devra également contenir la courbe de l'espace; donc enfin cette dernière se trouvera à la rencontre de ces deux surfaces, puisqu'elle est tracée sur chacune d'elles.

Généralement, ces courbes d'intersection ne sont pas des courbes planes : ce sont des courbes à *double courbure*, c'est-à-dire, dont tous les éléments ne sont pas dans le même plan.

Lorsqu'une courbe plane dans l'espace est parallèle à l'un des plans de projection, elle se projette sur ce plan suivant une courbe égale à elle-même; car les sections faites dans un prisme par des plans parallèles sont des polygones égaux.

§ 18. *Déterminer la position d'un plan dans l'espace. Traces d'un plan.* — Deux droites suffisent pour déterminer la position d'un plan. Si donc on donne les deux intersections d'un plan avec les plans de projection, elles suffiront pour fixer sa position.

Ces intersections se nomment les *traces* du plan, l'une, trace horizontale, l'autre, trace verticale, *fig.* 19.

Ces deux traces se coupent en un même point *a* de la ligne de terre, car ce point est le seul point commun aux trois plans, et il doit appartenir à chacune des intersections qui représentent respectivement les points communs au plan donné et aux plans de projection.

§ 19. *Traces d'un plan dans toutes ses positions.* — Lorsqu'un plan est parallèle au plan horizontal, *fig.* 20, il n'a pas de trace horizontale; sa trace verticale $a\,v$ est une parallèle à la ligne de terre, car ces deux lignes sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième.

Le contraire a lieu lorsque le plan est parallèle au plan vertical: il n'a pas de trace verticale, et sa trace est horizontale $a\,h$ est parallèle à la ligne de terre, *fig.* 21; même démonstration que ci-dessus.

Un plan parallèle à la ligne de terre *fig.* 22, a ses deux traces parallèles à la ligne de terre, car le plan horizontal de projection, qui passe par la ligne de terre, coupe le plan suivant une parallèle à cette ligne (70).

Lorsqu'un plan est perpendiculaire au plan horizontal, *fig.* 23, sa trace horizontale occupe une position quelconque par rapport à la ligne de terre, mais sa trace verticale est perpendiculaire à la ligne de terre; car elle est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan horizontal, et par suite elle est perpendiculaire à ce plan (79), et par conséquent perpendiculaire à la ligne de terre (62) qui passe par son pied.

Le contraire a lieu lorsque le plan est perpendiculaire au plan vertical: sa trace verticale est quelconque par rapport à la ligne de terre, et sa trace horizontale lui est perpendiculaire *fig.* 24; même démonstration que ci-dessus.

Un plan perpendiculaire à la ligne de terre, *fig.* 25, est à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection (77). Réciproquement la ligne de terre est perpendiculaire à ce plan, et par suite à ses deux traces qui passent par son pied.

Lorsqu'un plan passe par la ligne de terre, *fig.* 26, ses deux traces se confondent avec cette ligne, et cette dernière ne suffit plus pour déterminer la position du plan. Il faut alors, pour la fixer, se donner une autre droite située dans le plan, ou l'inclinaison du plan avec l'un des plans V ou H, ou bien enfin changer de plan vertical de projection, ou ce qui est la même chose, en d'autres termes, se donner la trace $t\,v$ du plan sur un autre plan vertical de projection, tel que P, pour lequel la nouvelle ligne de terre devient $t\,t'$, et qu'on suppose ici également rabattu sur le plan horizontal: les traces du plan seraient alors $t\,l'$, $t\,v$, et sa position serait ainsi parfaitement déterminée.

§ 20. *Ce que signifie en géométrie descriptive : donner ou trouver un point, une droite, un plan.* — D'après ce qui vient d'être dit dans les précédents paragraphes, on voit que, en géométrie descriptive, un point de l'espace est déterminé par deux points situés dans les plans de projection, une droite par deux autres droites, et un plan aussi par deux droites également situées dans les plans de projection. A l'avenir, lorsque nous donnerons un point, une droite ou un plan, nous entendrons par là les projections du point, de la droite, ou les traces du plan.

De même, lorsque, par quelque construction graphique, nous serons parvenus à la détermination des deux projections d'un point, d'une droite, ou des traces d'un plan, nous pourrons en conclure que ce point, cette droite ou ce plan, sont déterminés.

Nous n'emploierons plus désormais de croquis des figures en relief, que lorsqu'elles seront indispensables pour aider à une démonstration, et c'est toujours sur l'épure que nous effectuerons nos constructions.

§ 21. *Prendre un point sur une droite. Faire passer une droite par un point, par deux points.* Pour prendre un point sur une droite, en géométrie descriptive, il suffit de remarquer que lorsqu'un point appartient à une droite, ses projections doivent appartenir aux projections de cette droite; et comme d'ailleurs les projections d'un même point doivent se trouver sur une même perpendiculaire à la ligne de terre § 10, elles seront donc ainsi parfaitement déterminées. Soient hh', vv', *fig.* 27, les projections d'une droite; menant pp' perpendiculaire à la ligne de terre, p et p' sont les projections d'un point de la droite.

Si l'on donnait la projection p d'un point de cette droite, pour déterminer l'autre, il est clair qu'il suffirait de mener la droite $p\,p'$ perpendiculaire à la ligne de terre, jusqu'à la rencontre de la projection verticale de la droite en p'.

Pour faire passer une droite par un point donné p, p', *fig.* 28, il suffit de tracer dans les plans de projection deux droites qui passent par les projections respectives du point. Mais le problème est indéterminé, car il faut deux points pour déterminer une droite. On peut donc tracer une foule de droites par ce point.

S'il s'agit de faire passer une droite par les deux points p, p' et q, q', alors la droite est déterminée, et ses projections sont les deux lignes pq et $p'q'$. On ne saurait en mener une autre entre les deux points donnés.

§ 22. *Trouver l'intersection de deux droites; condition pour que deux droites se coupent.* — Lorsqu'un point appartient à une droite, ses projections appartenant à celles de la droite, il s'ensuit que si deux droites se coupent, leur point d'intersection doit avoir ses projections à la fois situées sur les projections des deux droites; donc ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$ se coupent au point o, o' *fig.* 29.

On tire de là un moyen de reconnaître si deux droites se coupent dans l'espace, à l'aide de leurs projections. En effet, si elles ont un point commun, ce point doit avoir ses projections placées sur une même perpendiculaire à la ligne de terre; et comme elles doivent être en même temps sur les projections des deux droites, il faudra donc que le point de rencontre de leurs projections horizontales et le point de rencontre de leurs projections verticales soient situés sur une même perpendiculaire à la ligne de terre. Telle est la condition pour que deux droites se coupent.

§ 23. *Les projections de deux parallèles sont parallèles. — Par un point donné mener une parallèle à une droite donnée.* — Soient h, h' les projections du point donné, *fig.* 30, soient ab, $a'b'$, les projections de la droite. Lorsque deux droites sont parallèles, leurs projections sur un plan quelconque sont parallèles, car les plans projetants passent par deux lignes parallèles, et sont perpendiculaires au même plan (82). Il suit de là que si par les projections h, h' du point donné, nous menons des parallèles respectives aux droites $a\,b$, $a'\,b'$, ces parallèles $c\,d$, $c'\,d'$, seront les projections de la parallèle demandée.

§ 24. — *Construire les projections d'un parallèlipipède connaissant les projections des ses trois arêtes contiguës, données de grandeur et de direction.* — On peut appliquer le § 23 à la résolution de ce problème. Soient *fig.* 31 et 32, ab, $a'\,b'$, ac, $a'\,c'$, ad, $a'\,d'$, les projections des trois arêtes. Si, par les extrémités de chacune d'elles, nous menons des parallèles aux deux autres, elles détermineront les trois faces du parallèlipipède qui contiennent les arêtes données. Ces faces sont $a\,d\,e\,c$, $a'\,b'\,e'\,d'$, $a\,b\,f\,c$, $a'\,b'\,f'\,c'$, $a\,d\,g\,c$, $a'\,d'\,g'\,c'$. Pour compléter le parallèlipipède, il suffit de mener les parallèles aux arêtes eh, $e'\,h'$, fh, $f'\,h'$, gh, $g'\,h'$.

§ 25. *Les projections d'un point étant données, trouver sa projection sur un plan perpendiculaire à l'un des deux premiers.* — *Même question pour une droite.* — On a souvent occasion de résoudre ce problème, et la solution en est fort simple. Elle est fondée sur le théorème du § 12. Soient h et v, les projections d'un point, *fig.* 33, et soit $l\,t'$, la nouvelle ligne de terre ou la trace du second plan vertical de projection. Si nous abaissons $h\,v'$ perpendiculaire à $l\,t'$ et si nous prenons $p'\,v'$, $=p\,v$, le point v' sera la projection demandée, car la distance du point au plan H est toujours $p\,v$ et doit être encore exprimée par $p'\,v'$ d'après le § 12.

Si l'on rabattait le nouveau plan de projection sur le plan V, en le faisant tourner autour de $l\,t''$ au lieu de $l\,t'$, la projection nouvelle prendrait la position v'' telle que $p''\,v''$ $=p\,h$, car $p''\,v''$ doit encore exprimer la distance du point au plan V, § 12.

Il est évident que pour tracer la projection d'une droite sur le nouveau plan, il suffirait d'y projeter deux points de cette droite, *fig.* 34.

§ 26. *Etant données les deux projections d'un palier sur les plans* V *et* H, *trouver sa projection sur un plan perpendicu-*

laire aux deux premiers. — Le problème précédent conduit à la solution. Quoique, en réalité, les deux projections d'un corps suffisent pour le déterminer, une troisième projection est souvent nécessaire, si ce n'est indispensable, pour saisir les parties qui se correspondent dans le dessin, et pour donner une idée plus nette du corps que l'on veut représenter. Prenons pour exemple un modèle de palier tel qu'il est façonné pour être livré aux fondeurs. Soit *fig.* 35 (H), la projection horizontale, et (V) la projection verticale. Soit *l't'* le nouveau plan de projection. Abaissant de tous les points de la projection horizontale (H) des perpendiculaires à *l't'*; à partir de cette ligne, nous porterons les distances de la projection verticale à *lt* sur les perpendiculaires correspondantes, et nous déterminerons ainsi la *fig.* (P) qui sera la troisième projection du palier. Le transport des distances à *lt* est indiqué par les arcs de cercle de la figure.

§ 27. *De la représentation des surfaces courbes.* — Nous avons vu comment on déterminait un point, une droite, un plan, en géométrie descriptive. Il nous reste à faire connaître la manière de représenter les surfaces courbes, limitées ou illimitées, et les corps solides polyèdres ou terminés par des surfaces courbes.

Lorsqu'une surface courbe est assujettie à une définition géométrique, cette définition est ordinairement traduite par des relations particulières entre certaines lignes droites ou courbes tracées sur la surface, relations de forme, de position ou de mouvement. En général, on peut dire *qu'une surface courbe est engendrée par une ligne droite ou courbe, assujettie à se mouvoir, suivant une loi déterminée, sur une ou plusieurs autres lignes fixes données de position.*

La première ligne est appelée *la génératrice* de la surface. Les lignes fixes en sont les *directrices.*

Pour mieux faire comprendre ce qui précède, nous donnerons quelques exemples de génération de surfaces, et nous commencerons par le plan.

Le plan est une surface qui peut être supposée engendrée par une droite assujettie à se mouvoir parallèlement à elle même, en s'appuyant sur une autre droite. Pour que le plan soit déterminé, il suffit alors de donner la directrice di, $d'i'$, *fig.* 36, et la droite ge, $g'e'$ à laquelle la génératrice doit être parallèle. Pour déterminer une position quelconque de la génératrice, il suffit de prendre un point h, v sur la directrice, et de mener par ce point une parallèle à ge, $g'e'$.

Une *surface cylindrique* est engendrée par une droite assujettie à se mouvoir parallèlement à elle-même en suivant les contours d'une ligne courbe donnée, qui est la directrice de la surface.

Pour déterminer une surface cylindrique, en géométrie descriptive, il suffit de donner les projections abc, $a'b'c'$, *fig.* 37, de la directrice, et les projections ge, $g'e'$ de la droite à laquelle la génératrice doit être parallèle. En effet, pour avoir une génératrice quelconque, il suffira de prendre un point h, v, sur la directrice, et de mener par ce point une parallèle à ge, $g'e'$.

Le cylindre droit à base circulaire dont nous nous sommes occupés en géométrie, n'est qu'un cas particulier de cette surface.

Une *surface conique* est engendrée par une droite assujettie à passer constamment par un point donné, appelé *sommet de la surface*, et à suivre le contour d'une ligne courbe donnée qui est la directrice de cette surface. Pour déterminer une surface conique, en géométrie descriptive, il suffit de donner les projections s, s' du sommet, et celles abc, $a'b'c'$ de la directrice, *fig.* 38, car, pour avoir une génératrice quelconque, il suffira de prendre un point h, v sur la directrice, et de joindre ce point au sommet.

Le cône droit à base circulaire n'est qu'un cas particulier de cette surface.

Nous avons vu en géométrie que toutes les sections faites par un plan passant par un diamètre de la sphère, étaient égales à un grand cercle de cette sphère. Cette surface peut donc être supposée engendrée par un demi-grand cercle abc

assujetti à tourner autour du diamètre *ab*, *fig.* 39. Cette sphère sera entièrement représentée en géométrie descriptive lorsqu'on donnera les projections de l'axe et le diamètre.

Cette surface n'est qu'un cas particulier des *surfaces de révolution* qui sont engendrées par une courbe plane assujettie à tourner autour d'un axe situé dans son plan. Pour que la surface soit déterminée, il faut connaître les projections *a*, *a' a"* de l'axe, *fig.* 40, ainsi que la véritable forme de la génératrice *a'bcd* supposée placée dans un plan *gg'* parallèle à l'un des plans de projection. Nous trouverons bientôt le moyen de déterminer les projections d'une position quelconque de la génératrice.

§ 28. *De la représentation des polyèdres.* — D'après ce que nous venons de dire, on voit qu'une surface courbe illimitée ne se représente pas par ses projections, de même qu'on ne donne pas les projections d'un plan, ce qui serait absurde, puisqu'un plan n'a pas de limites. Ces surfaces sont déterminées par les projections de certaines lignes tracées sur elles, la loi du mouvement de l'une d'elles étant donnée.

Les corps doués de trois dimensions ne sauraient avoir non plus de projections, et si cependant on donne ce nom aux figures qui les représentent, ce ne sont que les projections de certaines figures polygonales qui forment les limites de ces corps.

Ainsi, les projections d'une pyramide, d'un prisme, d'un polyèdre, ne seront que les projections des arêtes ou des faces polygonales, en ce sens que les projections de ces dernières ne seront que les figures déterminées par les projections de leurs côtés limites.

Quand on dira donc : *projection d'un plan*, on ne pourra entendre par cette locution que la projection du contour d'une figure placée dans ce plan: de même l'expression *projection d'un polyèdre*, signifiera la projection de certaines faces de ce polyèdre qui en formeront le contour.

Cela posé, cherchons à représenter un polyèdre en géométrie descriptive.

Les polyèdres étant composés d'arêtes et de sommets, on aura déterminé les projections d'un polyèdre, quand on aura projeté tous ses sommets sur les plans de projection.

Cette méthode, toute simple qu'elle est, ne saurait pourtant être suivie dans toute son étendue, parce que les polyèdres ayant une forme géométrique bien arrêtée, il sera souvent plus facile, et ensuite plus rigoureux pour l'exactitude du dessin, de déduire, par des constructions purement graphiques, certaines parties des projections, d'autres parties déjà obtenues.

Par exemple, quand on projettera un parallélipipède, au lieu de déterminer les projections de tous les sommets, on déterminera celles d'une face et celles de l'arête adjacente, et avec ces données, on pourra construire le parallélipipède. En projetant tous les sommets, on s'exposerait à ne pas rencontrer des arêtes parallèles entr'elles, quand elles doivent l'être.

En résumé, on voit donc que, dans la recherche des projections des solides, on devra s'appliquer particulièrement à déduire le plus grand nombre possible des éléments des projections, de la définition géométrique du solide.

§ 29. *Des divers moyens de représenter les corps par le dessin : Croquis, projections orthogonales, projections obliques, perspectives, ombres, coupes.* — Lorsqu'on veut faire le dessin d'un corps donné, on fait d'abord le *croquis* de ce corps, c'est-à-dire que, se plaçant vis-à-vis, on projette à vue les diverses arêtes et courbes qui sont tracées sur son enveloppe, sans le secours de la règle ni du compas. On fait ainsi trois projections, l'une sur le plan H, la seconde sur le plan V, et la troisième sur le plan P, perpendiculaire aux deux premiers. Dans l'art du mécanicien, comme le plus grand nombre des pièces d'une machine admettent souvent des faces rectangulaires, et des angles solides trirectangles, de sorte qu'elles renferment trois systèmes de lignes parallèles, rectangulaires entr'elles; on dispose ordinairement les corps, ou plutôt les plans de projection dont on peut toujours choisir la direction, de manière qu'un système d'arêtes soit perpendiculaire au plan H, tandis que le second l'est au plan V, et le troisième au plan P. Par ce moyen ces arêtes se projettent en véritable grandeur, § 17, sur deux des trois plans de projection. Ces trois systèmes d'arêtes constituent ce qu'on nomme généralement : *hauteur, largeur et longueur.*

Enfin, on cote en millimètres, si l'objet est de petite dimension, toutes les arêtes que l'on a projetées. Avec ces éléments on a tous les moyens de faire les diverses projections que nous allons maintenant définir.

On appelle *projection orthogonale* d'un corps la projection que l'on obtient quand toutes les lignes projetantes des points du corps sont perpendiculaires au plan de projection. Ce sont les projections les plus usitées dans les arts industriels. Nous étudierons plus loin ces sortes de projections avec quelque étendue.

Dans ces projections, on nomme *plan* la projection faite sur le plan H, *élévation* celle faite sur le plan V, et *profil* celle faite sur le plan P.

Pour trouver la projection orthogonale d'un corps, la méthode générale consiste à abaisser de tous les points de ses arêtes et de ses lignes de contour, des perpendiculaires aux plans de projection, en se conformant aux dispositions que nous venons de recommander. Mais nous verrons bientôt des moyens de simplifier cette méthode générale dans beaucoup de cas, et surtout pour des parties des corps qui n'auraient pas d'arêtes parallèles aux plans de projection.

Les lignes projetantes forment une surface cylindrique dont quelques parties peuvent être planes, ou prismatiques, et la projection est une section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices ou arêtes.

On appelle *projection oblique* d'un corps, celle que l'on obtient lorsque les lignes projetantes de tous les points du corps sont obliques par rapport au plan de projection, quoique toujours parallèles entr'elles, comme dans les projections orthogonales.

Il suit de cette définition que pour obtenir la projection oblique d'un corps, il faut se donner la direction des lignes projetantes, mener, par tous les points des arêtes, des parallèles à cette direction, et chercher les points de rencontre de ces parallèles avec les plans de projection. En joignant ces points de rencontre par des lignes correspondantes à celles du corps, on en aura la projection oblique.

Les lignes projetantes forment encore ici une surface cylindrique, mais la projection est une section oblique faite dans cette surface.

Nous reviendrons également plus loin sur ce mode de projection.

On appelle *projection perspective*, ou simplement *perspective* d'un corps, la projection que l'on obtient lorsque les lignes projetantes qui passent par tous les points du corps ne sont plus parallèles, comme dans les deux précédentes projections, mais vont concourir en un point que l'on suppose être l'œil de l'observateur.

D'après cela, pour obtenir la perspective d'un corps, il faut joindre le point de concours, supposé donné, à tous les points du corps, et chercher les points de rencontre de ces rayons visuels avec les plans de projection. En joignant ces points de rencontre par des lignes correspondantes à celles du corps, on en aura la perspective.

Il est évident que dans ce cas les lignes projetantes forment une surface conique dont le sommet est l'œil de l'observateur, et que la perspective du corps n'est qu'une section faite dans cette surface par le plan de projection.

Comme complément de ces procédés descriptifs des corps, et pour réaliser d'ailleurs ce qui se passe dans la nature, on détermine l'ombre portée par ces corps sur ceux qui les entourent, et aussi sur les plans de projection; c'est-à-dire, qu'on les suppose éclairés, comme dans la nature, par des rayons émanés d'un corps situé à l'infini, de sorte que ces rayons peuvent être considérés comme parallèles; alors, si l'on imagine que ce rayon lumineux suit les contours extérieurs du corps que l'on considère, il engendrera une surface cylindrique qui, derrière le corps, c'est-à-dire dans la partie de l'espace opposée à celle d'où la lumière vient, sépare l'espace en deux parties, l'une éclairée et l'autre dans l'ombre. Si cette dernière partie est rencontrée par un corps quelconque, un plan, la privation de lumière ou l'impression de l'ombre se fait sentir sur cet objet, et la limite de la figure qui s'y forme, est ce qu'on nomme *l'ombre portée* par le corps donné sur cet objet.

On reconnaît aisément que le rayon lumineux forme ainsi, dans son mouvement, une surface cylindrique qui enveloppe le corps de toutes parts, et qu'on nomme pour cette raison *surface enveloppe*. Cette surface touche le corps suivant une courbe qui le sépare en deux parties, l'une qui reçoit de la lumière, l'autre qui n'en reçoit pas.

On appelle *ombre propre* du corps la partie de ce corps qui ne reçoit pas de lumière, et *ombre portée* sur un objet quelconque l'intersection de la surface cylindrique qui a pour génératrice le rayon lumineux et qui enveloppe le corps, avec cet objet.

Il est aisé de remarquer la similitude des procédés employés pour obtenir les ombres portées et les projections obliques. Les lignes projetantes des projections obliques ne sont que les rayons lumineux, en supposant qu'on leur donne la direction des lignes projetantes. Nous serons donc naturellement conduits, en parlant des projections obliques, à nous occuper des ombres.

Enfin, nous citerons encore, dans le dessin, un dernier procédé qui sert à représenter les détails intérieurs des objets, qui restent imparfaitement signalés par les premiers procédés descriptifs. Ce sont les *coupes*, c'est-à-dire les intersections des corps par des plans quelconques.

§ 30. *Avantages et inconvénients des projections orthogonales.* — Lorsqu'on a placé un corps de manière que ses dimensions principales, c'est-à-dire, longueur, largeur et hauteur, soient parallèles aux plans de projection, toutes les arêtes et les courbes parallèles à ces plans ont l'avantage de s'y projeter en véritable grandeur; de sorte que, ayant dessiné les projections de l'objet sur les trois plans H, V, P, soit de grandeur naturelle, soit à une échelle donnée, on peut, avec le compas et le secours de l'échelle, relever une distance parallèle à l'un de ces trois plans, et en l'énumérant à l'aide de l'échelle, connaître immédiatement la longueur de la ligne de l'objet qui correspond à celle du dessin. Les trois dimensions des corps sont donc ainsi données par ces trois projections, et avec une seule échelle. Les avantages de ce mode de dessin sont donc incontestables; aussi est-il généralement adopté.

Nous verrons plus loin que ce genre de projection trouve encore son avantage, quand on place le corps sur un plan quelconque, ce qui permet de dessiner sur une seule projection trois faces de l'objet à la fois, tandis qu'en plaçant le corps parallèlement aux plans de projection, il faut trois projections pour donner une idée exacte du corps à dessiner. Nous parlerons bientôt du moyen ingénieux employé par M. Similien dans ses *projections orthogonales*, pour obtenir ce genre de projection.

Le seul inconvénient qu'on puisse trouver aux projections orthogonales, c'est d'exiger trois projections différentes pour représenter nettement le même objet, ce qui nécessite toujours de la part de celui qui consulte un dessin, une certaine habitude acquise de relier ces trois projections entre elles pour en déduire la forme réelle du corps.

L'unique projection sur un plan quelconque dont j'ai parlé plus haut, n'aurait pas cet inconvénient; mais comme le remarque parfaitement M. Similien, les directions des arêtes du corps sont altérées, ainsi que leurs grandeurs; et enfin il faut construire trois échelles, ce qui est toujours une opération difficile. Nous reviendrons sur ces considérations.

§ 31. *Avantages et inconvénients des projections obliques.* — Dans les projections obliques, si l'on place encore les dimensions du corps à dessiner parallèlement aux plans de projection, la longueur et la hauteur conserveront leur grandeur sur les plans de projection, comme parallèles comprises entre parallèles, *fig.* 41; la troisième dimension seule pourra être altérée, mais, comme nous le verrons, suivant un rapport donné et dépendant du choix de la direction des lignes projetantes. Une seule projection suffira pour représenter le corps, puisque deux de ses trois dimensions sont retrouvées à l'échelle donnée, et que la troisième pourra se conclure de celle du dessin, en l'affectant d'un coëfficient constant, qui pourra être aussi simple que possible, par exemple être égal à 1 ou à 2.

Cette projection a l'avantage de laisser voir le corps sous trois faces, et par conséquent de donner une idée nette de son ensemble : et cela sans trop en altérer les dimensions, puisqu'une seule s'en trouve modifiée, ce que ne fait pas la projection orthogonale sur un plan quelconque.

Son inconvénient est celui qui est commun à toutes les projections faites à l'aide de lignes projetantes parallèles; c'est de former une image du corps qui n'est point celle sous laquelle on le voit. Nous reviendrons encore en son lieu sur ce genre de projection, pour faire voir avec quel succès M. Simillien l'a appliqué au dessin des machines, pour donner une idée de leur ensemble.

§ 32. *Avantages et inconvénients de la perspective.* — La perspective seule a le privilége de faire apercevoir les corps tels que nous les présente la nature, parce que les lignes projetantes partent d'un point, et que, en effet, les rayons visuels partent de l'œil, pour aller suivre les contours du corps, et en laisser la trace sur un plan imaginaire placé entre l'observateur et l'objet.

Mais la perspective ne convient pas au dessin des machines, parce que le mécanicien a besoin de consulter le dessin, moins pour juger de son ensemble, que pour en relever les dimensions des diverses parties, à l'aide du compas et de l'échelle. Or, la perspective altère toutes les dimensions des corps, et le dessin serait alors impropre à reproduire immédiatement, et à l'aide du compas seul, les dimensions que l'ouvrier a besoin de connaître pour confectionner l'objet.

§ 33. *Conventions adoptées pour le tracé des lignes et pour celui des parties cachées.* — Comme la projection d'un corps est souvent fort éloignée d'avoir la forme que ce corps présente à l'œil, on est convenu de tracer en *plein* les arêtes ou courbes qui sont vues, et de *ponctuer* les arêtes ou courbes cachées. Voici les conventions adoptées à cet égard.

En regardant la projection horizontale, l'œil est supposé placé à une distance infinie au-dessus de ce plan, de sorte que tous les rayons visuels sont parallèles entre eux, et perpendiculaires au plan H. En regardant la projection verticale, l'œil est supposé placé en avant du plan V, et à une distance infinie de ce plan, de sorte que tous les rayons visuels sont encore les lignes projetantes des points du corps, par rapport au plan V.

Un point d'un corps sera *vu*, sur l'une des projections, lorsqu'une perpendiculaire élevée par ce point au plan de projection, et s'éloignant de ce plan, ne rencontrera sur son chemin aucune partie du corps à projeter. Un point du corps sera *caché* dans le cas contraire.

Sur les épures, nous étendrons cette convention aux lignes cachées par les plans.

La ligne de terre se trace pleine et fine; les lignes données, les plans, les corps donnés, se tracent en traits pleins plus gros, ainsi que les lignes, les plans et les corps trouvés, à l'exception des parties cachées qui se tracent en *points ronds*.

Toutes les lignes et plans de construction, destinés à conduire à la solution du problème, se tracent *en éléments de ligne* d'une longueur uniforme et très fins; les perpendiculaires à la ligne de terre se font en éléments de ligne très courts et très rapprochés.

La ponctuation en points ronds des parties cachées ne saurait s'adopter par les lignes de construction, dans aucun cas.

Les lignes ou les surfaces données ou trouvées, devront donc être ponctuées dans les parties cachées par les plans de projection.

§ 34. *Définir les traces d'une droite sur les plans de projection.* — On appelle *traces* d'une droite sur les plans de projection les points de rencontre de cette droite avec ces plans.

§ 35. *Déterminer les traces d'une droite dont les projections sont données.* — Soient hh', vv' *fig.* 42, les projections de la droite. La trace horizontale de cette droite est un point situé dans le plan horizontal. Ce point est également situé sur la projection horizontale de la droite, car il est à lui-même sa projection horizontale. La projection verticale de ce point est donc sur la ligne de terre; et comme c'est une projection verticale d'un point de la droite, elle doit faire partie des points de la projection verticale vv'. Donc enfin la projection verticale du point où la droite rencontre le plan H, est située à la rencontre v de la ligne vv' avec la ligne de terre. Or, les deux projections d'un même point se trouvent toujours sur la même perpendiculaire à la ligne de terre; si donc nous élevons vh perpendiculaire à lt, le point h où cette perpendiculaire rencontrera hh' sera la trace horizontale de la droite.

On ferait voir également que la trace verticale v' s'obtiendrait en prolongeant hh' jusqu'à la ligne de terre, et en élevant $h'v'$ perpendiculaire à lt jusqu'à la rencontre de vv' en v'.

Le procédé est applicable à toutes les positions de la droite, *fig.* 43.

§ 36. *Lorsqu'une droite est située dans un plan, ses traces sont situées sur les traces du plan.* — Ce principe, qui trouve à chaque instant son application, est facile à démontrer. En effet, la trace horizontale de la droite est un point à la fois situé dans le plan horizontal et dans le plan donné; il doit donc être un des points de la commune intersection de ces deux plans, c'est-à-dire de la trace horizontale du plan donné.

§ 37. *Lorsqu'un point est situé dans un plan, ses projections ne sont pas généralement situées sur les traces du plan. Quand cette coïncidence a-t-elle lieu?* — Il est évident que pour que la projection d'un point soit placée sur la trace d'un plan, il faut que ce plan soit perpendiculaire au plan de projection que l'on considère; il en est de même d'une droite.

§ 38. *On ne peut se donner un point ou une droite, appartenant à un plan, par leurs deux projections.* — Les deux projections d'un point ou d'une droite déterminent la position de ce point ou de la droite; dire que ce point ou cette droite sont situés dans un plan, est donc donner une condition de plus, ce qui est impossible.

§ 39. *Une seule projection d'un point ou d'une droite d'un plan, étant donnée, le point ou la droite sont déterminés.* — En effet, si par la projection donnée, on élève une perpendiculaire au plan de projection, sa rencontre avec le plan donné, détermine le point, comme aussi le plan projetant mené par la projection de la droite, détermine la droite par son intersection avec le plan donné.

§ 40. *L'une des projections d'une droite située dans un plan étant donnée, trouver l'autre projection.* — Soit $a\,b\,a'$ le plan donné, fig. 44; $h\,h'$ la projection de la droite. La trace horizontale de cette droite est en h, car cette trace doit être à la fois placée sur la projection $h\,h'$ et sur la trace du plan § 36. Ce point a pour projection verticale v qui appartient à la projection verticale cherchée de la droite. Pour en trouver un autre point, nous remarquerons que h' est la projection horizontale de la trace verticale de la droite; et comme cette trace doit aussi se trouver sur $b\,a'$, et aussi sur la perpendiculaire *h' v'*, elle se trouvera à la rencontre *v'* de ces deux lignes, et *v v'* est la projection demandée.

En prenant la droite dans toutes ses positions, ainsi que le plan, nous sommes conduits à considérer la droite quand elle est parallèle à l'un des plans V ou H, ce qui fournit le théorème suivant que nous allons démontrer.

§ 41. *Quand une droite parallèle à l'un des plans* V *ou* H *est située dans un plan quelconque, sa projection sur* V *ou sur H est parallèle à la trace du plan sur ce même plan de projection.* — En effet, supposons cette droite horizontale. Le plan donné et le plan projetant passent donc par cette ligne, et leurs intersections avec le plan H sont parallèles (70).

Il suit de là que si l'on veut appliquer le problème du paragraphe précédent à ce cas, il faudra se donner la projection horizontale parallèle à la trace horizontale du plan, si c'est d'une parallèle au plan H qu'il s'agit; ou se donner une parallèle à la trace verticale, s'il est question d'une parallèle au plan vertical.

Soit *h h'*, *fig.* 45, la projection horizontale d'une horizontale. Élevant *h v* perpendiculaire à la ligne de terre, le point *v* est la trace verticale de cette ligne, et *v v'* est sa projection.

Soit *v v'* la projection verticale de l'horizontale. Abaissant *v h*, perpendiculaire à la ligne de terre, et menant *h h'* parallèle à *b a*, ce sera la projection horizontale de l'horizontale.

§ 42. *L'une des projections d'un point situé dans un plan étant donnée, trouver l'autre projection.* — Il suffit pour résoudre ce problème de faire passer une droite par ce point dans le plan, et de déterminer l'autre projection de cette droite, comme nous venons de le faire.

Soit *h* la projection horizontale du point donné, *fig.* 46. On peut employer à la détermination de sa projection verticale *v*, soit une droite quelconque dont on se donne arbitrairement la projection horizontale ab, et dont on détermine la projection verticale $a'b'$; soit une horizontale cd, $c'd'$; soit une parallèle au plan vertical ef, $e'f'$, etc.

Si le plan était parallèle à la ligne de terre, on résoudrait le problème de la même manière; mais on peut le faire par une construction plus élégante. Soient ab, $a'b'$, *fig.* 47, les traces du plan, h la projection donnée. Menons par le point h, un plan perpendiculaire à la ligne de terre; il contiendra le point donné, et ce point sera situé sur l'intersection des deux plans. Or, cette intersection perce les plans H et V aux points k et g, car elle est contenue dans chacun des deux plans, § 36. Et elle est l'hypothénuse d'un triangle rectangle dont gp est un des côtés, et pk l'autre côté. Rabattant ce triangle sur le plan horizontal en le faisant tourner autour de pk, il prendra la position pkm, car pg étant perpendiculaire à pk lui restera perpendiculaire pendant ce mouvement, et se rabattra sur la ligne de terre. L'intersection deviendra donc km. Dans ce mouvement, le point de l'espace A décrit un arc de cercle perpendiculaire à la charnière, et est venu se rabattre sur hn perpendiculaire à pk. Donc ce point sera situé en r. Sa hauteur au-dessus du plan H étant hr, on aura sa projection verticale v en faisant $pv = kr$, § 12.

Nous trouverons bientôt d'autres applications du rabattement précédent.

§ 43. *Trouver l'intersection de deux plans.* — Ce problème ainsi posé signifie, en géométrie descriptive, qu'il s'agit de trouver les projections de l'intersection de deux plans dont les traces sont données.

Soient apb, $c'a'b'$ les plans donnés, *fig.* 48. L'intersection de ces deux plans doit percer le plan de projection H à la fois sur les deux traces ac, $a'c'$. § 36; donc h est la trace horizontale de cette droite. De même sa trace verticale est le point v'. On a donc déjà un point de chacune des projections de la droite, car on sait que la trace d'une droite sur l'un des plans de projection, § 35, est toujours située sur la projection de cette droite sur ce plan. Mais h est dans le plan H, donc sa projection verticale v est sur la ligne de terre. De même v' est dans le plan V; donc sa projection h' est sur la ligne de terre. Donc enfin $h\ h'$ et vv' sont les projections de l'intersection des deux plans.

Si les traces horizontales des deux plans sont parallèles, *fig.* 49, l'intersection est horizontale, car ces deux plans passent alors par deux lignes parallèles (72 et 71). Le point v est la trace verticale de l'intersection ; donc $v\,v'$ est la projection verticale de cette intersection, et hh' parallèle à ac en est la projection horizontale, § 41.

Si l'un des plans donnés est horizontal, *fig.* 50, l'intersection est horizontale, sa projection verticale est vv', parallèle à lt, et sa projection horizontale est hh' parallèle à ac § 41.

Si l'un des plans est vertical, sa trace horizontale sera la projection de l'intersection, *fig.* 51 ; si l'un est perpendiculaire au plan H et l'autre au plan V, la trace horizontale du premier et la trace verticale du second seront les projections de l'intersection, *fig.* 52.

Les deux plans étant perpendiculaires au plan H, l'intersection est une perpendiculaire à ce plan, *fig.* 53 ; et elle a pour projections h, $v\,v'$.

Lorsque les deux plans sont parallèles à la ligne de terre ou qu'ils passent par le même point de la ligne de terre, *fig.* 54, on peut couper ces deux plans par un troisième quelconque, qui rencontre chacun d'eux suivant une droite, et ces deux droites se coupent sur l'intersection. Ce point de section suffit dans le premier cas, car l'intersection est parallèle à lt, et dans le second, car l'intersection passe par le point de la ligne de terre où les plans se coupent.

Nous retrouverons § 49 un procédé plus élégant pour déterminer ces intersections.

Quand les traces respectives des deux plans ne se rencontrent pas sur l'épure, on peut se proposer de trouver leur intersection. Soient $b\,a\,c$, $b'\,a'\,c'$ les plans donnés, *fig.* 54. Si nous menons un plan quelconque qui coupe ces deux plans, les intersections se rencontreront sur l'intersection commune de ces deux plans. Il en sera de même si nous les coupons par un second plan quelconque. Nous aurons donc ainsi déterminé deux points de l'intersection cherchée.

Prenons pour premier plan quelconque un plan horizontal de, et pour deuxième plan un plan parallèle au plan vertical fg. Le plan de coupe les deux plans suivant deux droites qui se rencontrent en h et v, et le plan fg les coupe suivant deux droites qui se rencontrent en h', v'. Donc hh', vv', sont les projections de l'intersection cherchée.

§ 44. *Des rabattements ; de leur utilité.* — Lorsqu'un plan contient des points, des droites, des courbes, qu'on veuille disposer comme ils le sont dans l'espace, on y parvient aisément en faisant tourner ce plan autour de l'une de ses traces comme charnière, et en le rabattant sur l'un des deux plans de projection. On rabat aussi tout ce qui se trouve dans ce plan, et l'on a ainsi le moyen d'exécuter sur l'épure, puisqu'on opère sur les plans de projection, les opérations qu'on est dans la nécessité d'effectuer sur les points, les lignes, et les courbes dans le plan.

Le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre n'est qu'un cas particulier de ces rabattements.

§ 45. *Un point d'un plan étant donné, trouver son rabattement sur le plan* H, *quand on fait tourner le plan autour de sa trace horizontale pour le rabattre sur le plan* H. *remarquer que la construction donne l'angle du plan avec l'un des plans* V *ou* H — Soient h et v les projections du point, *fig.* 55 ; ab, $a'b$, les traces du plan.

Tout point d'un plan qui tourne autour d'une droite, et en général tout point d'un corps qui tourne autour d'un axe, décrit un arc de cercle dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe, et dont le plan est perpendiculaire à l'axe ou à la charnière (62).

Par le point donné, menons donc un plan perpendiculaire à la charnière. Il sera perpendiculaire au plan donné et au plan horizontal, et ce sera le plan de l'arc de cercle. Sa trace horizontale passera par h, § 37, et sera perpendiculaire à $a b$, car $a b$ intersection de deux plans perpendiculaires à un troisième, est perpendiculaire à ce troisième (79), et par conséquent perpendiculaire à la trace du plan que nous venons de mener. Cela posé, si nous supposons le point de l'espace joint à sa projection h et au point g par deux droites, elles formeront avec $g h$ un triangle rectangle en h, qu'il est aisé de construire, car $g h$ est un des côtés de l'angle droit, l'autre côté est la hauteur du point au-dessus du plan H, et cette hauteur est mesurée par $p v$, § 12. Or, l'hypoténuse de ce triangle est perpendiculaire à $a b$, car elle est située dans le plan $g o g'$, puisqu'elle unit le point donné et le point g qui sont situés dans ce plan; et alors la ligne $a b$, qui est perpendiculaire au plan $g o g'$, est perpendiculaire à cette ligne qui passe par son pied dans ce plan. Donc enfin l'hypoténuse du triangle rectangle dont nous parlons, est perpendiculaire à $a b$, et exprimera le rayon de l'arc de cercle décrit par le point donné, ou la distance de ce point à la trace $a b$. Dans le rabattement, cette ligne reste perpendiculaire à la charnière, et elle vient s'appliquer sur le prolongement de $o g$ en $g k$. Pour avoir la position du point dans ce rabattement, il suffit donc de trouver la grandeur de l'hypoténuse précédente. Ce triangle pourra se construire où l'on voudra, avec les deux lignes $g h$ et $v p$; ordinairement, on rabat ce triangle sur le plan H, en le faisant tourner autour de $g h$ comme charnière; le second côté du triangle, dans ce mouvement, reste perpendiculaire à la charnière $g h$, et prend la direction $h d$. Faisant $h d = p v$, et joignant $g d$, cette ligne est la véritable grandeur de l'hypoténuse; et en la portant de g en k, le point k est la position du point de l'espace dans le rabattement du plan.

Il est facile de voir que $g d$ n'est qu'une partie du rabattement $g g''$ de l'intersection des deux plans $a b a'$, $g o g'$; cette intersection perce le plan H en g, et le plan V en g'. On obtiendra donc également la longueur gd en rabattant l'intersection entière en gg'', à l'aide de l'arc de cercle $g'g''$, et de la perpendiculaire og'' à og. Menant ensuite hd parallèle à og'', gd se trouve déterminé.

La détermination de la longueur gd pourrait encore se faire en rabattant le triangle rectangle sur le plan V, en le faisant tourner autour de og'. Alors l'intersection des deux plans prend la position $g'g'''$. Dans ce mouvement, le point ne change pas de hauteur vp au-dessus du plan H, il se rabat donc en d' sur la parallèle vd' à la ligne de terre, et $g'''d' = gd$. Portant $g'''d'$ de g en k, le point k est déterminé.

Il est à remarquer que l'angle dgh, ou son égal $og'''g'$, est précisément l'angle du plan donné avec le plan H; car il est formé par deux perpendiculaires menées au point g de la commune intersection, et dans chacun des deux plans.

Pour que l'épure indique la série des constructions à effectuer, on transporte d'abord la ligne pv de h en d, en la transportant sur la ligne de terre de p en f, à l'aide du quart de cercle vf décrit de p comme centre; puis, on transporte pf de h en i, à l'aide de la perpendiculaire fi; et enfin on porte hi de h en d par l'arc de cercle id décrit de h comme centre. On porte ensuite gd de g en k, avec l'arc de cercle dk, décrit de g comme centre. Dans les autres procédés, on tracera $g'g''$, gg'', puis hd, puis enfin dk; ou bien encore gg''', $d'k'$, du point g''' comme centre, et $k'k$ du point o comme centre.

§ 46. *Rabattement d'une droite quelconque, d'une droite et d'un plan dans toutes leurs positions.* — Pour rabattre une droite située dans un plan, il suffirait d'en rabattre deux points, et de joindre ces deux rabattements par une droite. On y parvient plus simplement, en rabattant un seul point h, v, *fig.* 56, en k, et remarquant que la droite ab, $a'b'$ perce le plan horizontal en a sur la charnière, et que ce point reste fixe dans le rabattement; de sorte que la droite rabattue doit toujours passer par ce point; pour obtenir le rabattement de la droite, il suffit donc de joindre le point k au point a.

Le rabattement d'une horizontale, *fig.* 57, se fait en rabattant un de ses points en k, et en menant une parallèle kg à la trace horizontale du plan.

Les rabattements présentent plus de simplicité, lorsque le plan n'est pas quelconque.

Le plan étant perpendiculaire au plan V ou au plan H, *fig.* 58, le rabattement s'obtient en menant hk perpendiculaire à la trace, et prenant $hk = pv$. Si l'on rabat sur le plan V, le point ne change pas de hauteur au-dessus de H, et son rabattement se trouve sur $v\,k'$ parallèle à lt; de plus, ce point décrit dans l'espace un cercle horizontal dont la projection horizontale est $h\,h'$ décrit de o comme centre avec oh comme rayon, et dont la projection verticale est $k'v$. La ligne projetante du point est devenu $h'\,k'$ dans le rabattement.

La droite cd, $c'd'$ du plan aoa' se rabat en $k\,a$ *fig.* 59.

Le plan étant perpendiculaire à la ligne de terre *fig.* 60, un point h, v se rabat en k tel que $hk = vp$, ou en k' tel que $vk' = hp$. Une droite de ce plan passant par les deux points h, v, h', v', se rabat en $g\,k$ sur le plan H.

§ 47. *Le rabattement d'un point ou d'une droite étant donnés, retrouver les projections du point ou de la droite.* — Soient $a\,b\,a'$ le plan donné, k le rabattement du point, *fig.* 61. Lorsqu'on relève le plan et le point k, ce point décrit autour de la charnière $a\,b$ un arc de cercle dont le rayon est kg perpendiculaire à $a\,b$, et dont le plan est perpendiculaire à $a\,b$, et par suite au plan horizontal. Donc le point cherché se projettera horizontalement sur la ligne kg, prolongée s'il est nécessaire. Si maintenant du point k considéré dans l'espace, on suppose abaissée sa ligne projetante, elle formera avec kg comme hypoténuse un triangle rectangle dont le second côté situé sera go sur la distance de la projection horizontale cherchée au point g. Or, nous avons les éléments nécessaires pour construire ce triangle rectangle, car nous connaissons l'hypoténuse $k g$, et l'angle que fait cette hypoténuse dans l'espace avec la ligne go, car cet angle, d'après la remarque du § 45, n'est autre chose que l'inclinaison du plan sur le plan horizontal. On peut trouver cet angle par une construction fort simple, en remarquant que la ligne kg, dans l'espace, n'est autre chose que l'intersection des deux plans aba', gog', qui perce le plan H en g, et le plan V en g'. Faisant tourner le plan gog' autour de og' pour le rabattre sur le plan V, on aura $g'g''$ pour cette intersection. Prenant $g''k' = gk$, le point k' est le point de l'espace rabattu sur le plan V. En ramenant le plan dans la position gog', le point h' prend la position k. Dont la projection verticale est v situé sur la parallèle $k'v$ à lt, et en même temps sur pg' projection verticale de l'intersection.

On construirait également bien le triangle $g''k'h'$ sur le plan horizontal, en rabattant le plan gog' sur le plan horizontal. $g'o$ devient og''' et l'intersection gg'''. Faisant $gk'' = gk$, et projetant k'' sur go, on détermine le point h, et ensuite v par $p'v = hk''$.

L'angle du plan avec le plan H pourrait encore se trouver en rabattant un point quelconque.

Etant donné le rabattement d'une droite, pour trouver ses projections, on relèvera deux points de cette droite ; mais on peut y parvenir en relevant un seul point, et se servant de la trace de cette droite. Soit ab le rabattement donné, *fig.* 62. Le point b où cette droite coupe la trace ou la charnière, reste fixe quand on ramène le plan dans sa première position. Donc, ce point sera la trace horizontale de la droite cherchée, et ses projections b, b' seront situées sur les projections de la droite. En cherchant les projections c', c'' d'un point c de ab, les projections de la droite devront passer par les deux points b, b', $c'c''$, et seront déterminées.

S'il s'agissait de relever une droite cd parallèle à la trace du plan, cette droite relevée serait horizontale, car elle serait parallèle à la trace qui est située dans le plan horizontal. Donc ses projections sont $c'd'$ et $c''d''$, l'une parallèle à la trace, l'autre parallèle à ligne de terre.

Prenons le plan perpendiculaire au plan H, et soit proposé de trouver les projections d'un point dont le rabattement est a, et les projections d'une droite dont le rabattement est ab, *fig.* 63. Cette droite aura pour projection horizontale bc. Sa projection verticale passera par b'. Pour trouver les projections du point a de la droite, nous abaisserons ah perpendiculaire à bc et le point h est la projection horizontale du point a § 37. Sa projection verticale v s'obtient en prenant $vp = ah$, car ah exprime la distance du point au plan H. Donc enfin v; h; sont les projections du point a, et bh, bv, sont les projections de la droite ab.

Si le rabattement s'était opéré autour de la trace verticale *fig.* 64, soit a le rabattement du point. Abaissons ap perpendiculaire à la charnière; cette perpendiculaire contient la projection verticale. De plus, la verticale aq, dans le mouvement du plan pour revenir à sa position primitive, vient se projeter en h. Elevant la perpendiculaire hv, le point k, v, est déterminé.

Soit proposé de trouver les projections du point dont le rabattement est a, *fig.* 65, ce point étant supposé dans le plan hab perpendiculaire à la ligne de terre. La projection horizontale de ce point est h, et sa projection verticale est v, tel que $ov = ah$. Dans le mouvement du plan pour revenir à sa position primitive une droite df qui coupe la charnière en d, perce donc le plan horizontal en ce point. Pour déterminer le point où elle perce le plan V, il suffit de relever le point f, car dans le mouvement, fo reste perpendiculaire à la charnière od, dans le plan vertical, et vient s'appliquer en d'. Donc d' est la trace verticale de la droite df.

§ 48. *Rabattement autour d'une parallèle à la trace du plan.* — Quelquefois, au lieu de rabattre un plan sur l'un des plans V ou H, en le faisant tourner autour d'une de ses traces, on le fait tourner autour d'une parallèle à l'une de ses traces pour le placer dans une position parallèle à l'un des plans V ou H. On parvient de la manière suivante à trouver les projections des points ou des droites situés dans ce plan, dans cette nouvelle position.

Soit proposé de faire tourner le plan $a b a'$, *fig.* 66, autour de la ligne horizontale $c d$, $c' d'$ jusqu'à ce qu'il soit horizontal, et de trouver ce que deviennent les projections h et v, d'un point de ce plan dans le mouvement. Ce point décrit dans l'espace un arc de cercle perpendiculaire à la charnière, par suite à sa parallèle $c d$, et par conséquent vertical. Sa trace passe donc par h et est perpendiculaire à $c d$. Le rayon de l'arc de cercle décrit par le point, ou la distance de ce point à la charnière, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $h k$ est un des côtés, et dont l'autre côté est la distance du point au plan horizontal $c' d'$. Cette distance est mesurée par $v g$. Faisant tourner le plan de ce triangle autour de son côté horizontal, on obtient sa projection dans le plan horizontal qui passe par la charnière, en menant $k p$ perpendiculaire à $h k$ et égale à $v g$. Portant $k p$ de k en h', le point h' est la projection de h, v, dans le rabattement, et sa projection verticale est v'.

Si une droite du plan $h . h''$ $v . v''$, était donnée, et qu'on voulût avoir ses projections dans le rabattement, on rabattrait un point h, v, de cette droite, et l'on chercherait le point $o o'$, où elle rencontre la charnière, point qui reste fixe dans le mouvement, et par lequel passe encore la droite dans le rabattement, donc cette droite a pour nouvelles projections $o h'$, $o' v'$.

Réciproquement, étant donnés un plan $a b a'$, *fig.* 67, et les projections $h' v'$ d'un point de ce plan, quand on l'a fait tourner autour d'une horizontale $c d$, $c' d'$, et qu'il a été amené parallèlement au plan H ; soit proposé de trouver les projections de ce point quand on ramène le plan dans sa première position. Il suffit de faire les constructions inverses des précédentes. La distance du point à la charnière est mesurée par la ligne $h' k$, et si l'on porte $h' k$ de k en p sur une ligne $k p$ faisant avec $h' k$ un angle égal à l'inclinaison du plan avec le plan H, il faudra ensuite abaisser $p\,h$ perpendiculaire sur $k\,h'$, ce qui donnera la projection h du point. On trouve sa projection verticale v, en prenant $v\,g = p\,h$, car $p\,h$ exprime la hauteur du point au-dessus de l'horizontale $o\,d$, $c'\,d'$.

Une droite quelconque $h'\,m'$, $c'\,d'$ étant supposée rabattue, dans les mêmes circonstances, sa projection verticale $c'd'$ doit se confondre avec celle de la charnière.

Pour trouver ses projections dans la position primitive du plan, il suffira de chercher les projections h, v d'un point, puis de joindre ce point à celui n, n' où la droite coupe la charnière, ce qui donne $n\,h$, $n'\,v$.

Soit encore proposé de faire tourner le plan vertical $a\,b\,a'$, *fig* 68, autour de l'horizontale $a\,b$, $a'\,b'$, jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan H. Sa trace se confondra alors avec $a'\,b'$; et soit proposé de trouver les projections du point h, v dans cette nouvelle position. Ce point décrira encore un arc de cercle perpendiculaire à la charnière, et comme cette dernière est horizontale, le plan de l'arc de cercle sera vertical, et sa trace sera $k\,h$ perpendiculaire à $a\,b$. La hauteur de ce point au-dessus de l'horizontale est mesurée par $v\,g$. Cette hauteur, dans le mouvement, est devenue perpendiculaire à la charnière suivant une parallèle à $h\,k$, et se projette sur $h\,k$ en véritable grandeur suivant $h\,h'$. Projetant h' sur $a'\,b'$, on a h', v' pour les projections du point h, v, lorsque le plan est devenu horizontal.

Pour trouver les projections d'une droite dans ce même cas, on se sert d'abord du point a, a', *fig*. 69, ou cette droite $a\,b$, $a'\,b'$, coupe la charnière $a\,b$, $a'\,b''$. Les projections de la droite devront encore passer par ces points. Il suffit de trouver les projections d'un autre point. On peut choisir ici celui b', b où la droite perce le plan vertical. Ses nouvelles projections sont c', c, et les projections nouvelles de la droite, $a\,c$, $a'\,c'$.

Enfin, faisons tourner le plan autour d'une verticale, ou d'une perpendiculaire au plan vertical, *fig*. 70.

Soient a, $a'a''$, les projections de la verticale, h, v, un point du plan.

Lorsqu'on aura amené le plan parallèlement au plan V en cd, le point de l'espace aura décrit un arc de cercle perpendiculaire à la charnière, c'est-à-dire horizontal, qui se projettera suivant hk' décrit de a comme centre avec ah pour rayon. Et comme dans ce mouvement, le point n'a pas changé de hauteur au-dessus du plan H, sa projection verticale sera située sur vv' parallèle à lt. Donc h', v', sont les projections nouvelles du point h, v.

Une droite ah, bv, située dans le même plan, et passant par le point v, h, reprendrait dans les mêmes circonstances, pour projections ah', bv', en remarquant que le point a, b est celui où la droite coupe la charnière, et que ce point reste fixe dans le mouvement.

Soit maintenant proposé de faire tourner le plan bcb', *fig.* 71, autour de la perpendiculaire au plan vertical a, $a'a''$, et de trouver dans ce rabattement les projections du point h, v, de ce plan. Ce point décrit un arc de cercle parallèle à V dont la projection verticale est vv', et dont la projection horizontale est hk' parallèle à lt. Donc h', v' sont les projections du point h, v, dans cette nouvelle position.

Les projections de la droite hk, va, dans les mêmes circonstances, seraient $h'k$, $v'a$, parce que le point k est celui où la droite coupe la charnière. On pourrait choisir tout autre point que le point h, v pour déterminer les nouvelles projections de la droite. On pourrait prendre par exemple la trace horizontale ou la trace verticale. La première se rabat en r, r'.

§ 49. *Intersection de deux plans dans quelques cas particuliers.* — Si deux plans étaient parallèles à la ligne de terre, *fig.* 72, coupons ces deux plans par un troisième, perpendiculaire à lt. Ce plan coupera les deux plans donnés suivant deux droites qui se rencontreront en un point de l'intersection cherchée. Rabattons ce plan auxiliaire et tout ce qu'il contient sur le plan H, en le faisant tourner autour de *ph*. Les intersections de ce plan auxiliaire avec les deux plans donnés, percent les plans de projection, l'une en *h* et *v*, l'autre en *h'* et *v'*, et ces intersections se rabattent, l'une en *hk*, l'autre en *h'k'*. Le point de rencontre *g* de ces deux lignes est le point cherché de l'intersection, rabattu sur le plan H. En le relevant, on trouve ses projections *i*, *i'*, § 47, *fig*. 65. Par ce point menant une parallèle à la ligne de terre, cette ligne est l'intersection demandée.

Il est aisé de voir que la condition pour que deux plans parallèles à la ligne de terre se coupent, c'est que les deux lignes *hk*, *h'k'* se coupent. Quand elles sont parallèles, *fig*. 73, les plans donnés seront alors parallèles. Dans ce cas on a *ph* : *ph'* :: *pk* : *pk'* ou :: *pv* : *pv'*.

Donc deux plans parallèles à la ligne de terre seront parallèles entre eux, lorsque les distances de leurs traces horizontales à la ligne de terre seront directement proportionnelles aux distances de leurs traces verticales à la même ligne.

Si les deux plans coupaient la ligne de terre au même point *b*, *fig*. 74, ce point serait d'abord un point de l'intersection. Pour en trouver un autre, nous mènerons un plan perpendiculaire comme dans les cas précédents, et nous conduirons l'opération de la même manière. Nous trouverons ainsi *h* et *v* pour les projections du point de rencontre des deux intersections; *bh*, et *bv* pour celles de l'intersection.

Si l'un des plans passait par la ligne de terre, *fig*. 75, et faisait avec l'horizon un angle *c*, § 19, on couperait encore par un plan perpendiculaire à *lt*, et on opérerait le rabattement des deux intersections. Celle du plan quelconque est facile à construire, l'autre est une ligne *pk*, faisant avec *ph* un angle égal à *c*. Donc *k* est le rabattement du point de rencontre des deux intersections. On relève ce point dont *h* et *v* sont les projections, puis *bh*, *bv* sont celles de la droite cherchée.

§ 50. *Faire passer un plan par un point, par une* *droite, par deux droites, par un point et une droite, par trois points.* — Pour faire passer un plan par un point, il faut en déterminer les traces. Or, si l'on fait passer une droite par ce point, tout plan qui contiendra cette droite, passera par le point. Le problème reviendra donc a faire passer un plan par une droite. Mais lorsqu'une droite est contenue dans un plan, ses traces sont situées sur les traces du plan. Il suffira donc de déterminer les traces de la droite, et de faire passer par ces deux points deux lignes qui se coupent sur la ligne de terre.

Le problème est évidemment indéterminé, et l'on pourra faire passer une infinité de plans par le point donné.

Soit h, v le point donné, *fig.* 76, menons ab, $a'b'$ quelconque. Les traces a et a' de cette droite sont des points des traces horizontale et verticale du plan. Menant les deux lignes oa, oa', ou pa, pa' etc., on aura autant de plans qu'on voudra passant par le point h, v.

Pour faire passer un plan par deux droites qui se coupent, *fig.* 77, ou par deux droites parallèles, il suffira de chercher les traces de ces droites, et ces points appartiendront aux traces du plan, qui devront d'ailleurs se couper sur la ligne de terre. C'est une vérification de l'épure.

Si les deux droites sont, l'une, parallèle au plan H, l'autre au plan V, chaque droite ne détermine qu'un point de chacune des traces, *fig.* 78, mais les directions des traces sont connues en vertu du § 41. Donc, si par les points r et r' on mène une parallèle à bc et une à $d'e'$, ces parallèles seront les traces du plan cherché.

Lorsqu'on donne une droite ab, $a'b'$, *fig.* 79, et un point h, v, on fera passer un plan par cette droite et ce point, en joignant le point à un point quelconque k', v', de la droite, ce qui donnera deux droites qui se coupent; ou bien on mènera une parallèle à la droite par le point; la question sera ramenée au problème précédent; et les traces du plan passeront par les traces de ces deux droites. On trouve kck' pour le plan cherché.

On détermine les traces d'un plan qui passe par trois points donnés, *fig.* 80, en joignant ces points par des droites. Deux de ces droites suffiront pour déterminer le plan. On en cherche les traces, ce qui donne des points des traces du plan. La troisième droite doit également avoir ses traces situées sur celles du plan.

§ 51. *Faire passer une circonférence par trois points donnés, trouver les projections du centre, la grandeur du rayon, et les projections de la circonférence.* — Soient *h*, *h'*, *h''*, *v*, *v'*, *v''*, *fig.* 81, les projections des trois points donnés. Nous construirons d'abord les traces *a b a b'* du plan qui passe par ces trois points; puis, nous rabattrons ce plan et les trois points sur le plan horizontal. Pour cela nous rabattrons en *k* l'un des points *h*, *v* par le moyen indiqué § 45; pour trouver le rabattement des deux autres points, nous chercherons d'abord le rabattement des deux droites qui passent par le point *v*, *h*, et qui ont servi à déterminer les traces du plan. Ces droites percent le plan H en *g* et *g'*; donc les rabattements de ces droites sont *g k* et *g' k*, § 46. Les points *h'*, *v'*, et *h''*, *v''*, devant se trouver sur chacune de ces deux droites, pour avoir leur rabattement, il suffit d'abaisser les perpendiculaires *h' k'* et *h'' k''* à la trace du plan, et les rabattements de ces deux points se trouveront à la rencontre de ces perpendiculaires et des droites *g k* et *g' k* aux points *k'* et *k''*. Ces deux points doivent encore se trouver sur la troisième droite qui joint les points *h'*, *v'*, et *h''*, *v''*, et qui perce le plan H en *g''*. Donc *k' k''* doit passer par *g''*. *k*, *k'*, *k''*, sont donc les trois points du plan, et dans leur position relative. Si nous faisons passer une circonférence de cercle par ces points, ce sera la circonférence demandée, et son centre, le centre cherché. Pour relever ce centre *c*, on pourrait le faire par le procédé ordinaire, § 47, mais on peut encore y parvenir en joignant le point *c* à l'un des points donnés *k*, et déterminant les projections de cette ligne qui passe par le point *k* dont les projections sont *h* et *v*, et perce le plan horizontal en *g'''* dont les projections sont g''' et m'''. Les projections de cette ligne sont donc $g''' h$ et $m''' v$. Abaissant du point c une perpendiculaire sur la trace, le point de rencontre de cette perpendiculaire et de la droite $g''' h$ détermine la projection horizontale c' du centre du cercle. La projection verticale c'' s'en déduit aisément.

Maintenant, pour projeter le cercle, il suffit de chercher les axes des deux ellipses qui en sont les projections. Or, tous les diamètres étant égaux, le diamètre horizontal est celui qui aura la plus grande projection horizontale, puisqu'il se projettera en véritable grandeur, et le diamètre parallèle au plan vertical est celui qui aura la plus grande projection verticale. La première projection donnera donc le grand axe de l'ellipse sur le plan H, et la seconde le grand axe de l'ellipse sur le plan V. Évidemment le diamètre parallèle au plan H est de parallèle à la trace ab du plan. Sa projection horizontale est $d'e'$ et sa projection verticale $d''e''$. Le petit axe $f'p'$ est donné par le diamètre fp, dont on relève les points f et p. Pour trouver le grand axe de l'ellipse sur le plan V, nous mènerons par c'' une parallèle $c''q'$ à la trace verticale du plan; cette parallèle devra contenir cet axe, et sa projection horizontale sera qc' parallèle à la ligne de terre. Son rabattement sera qc. Donc st sera le diamètre qui donnera le grand axe de la projection verticale. Relevant les points s et t, on trouvera s', s'' et t', t'', pour les projections de ce grand axe. Menant par c'' une perpendiculaire au grand axe, et déterminant le rabattement de cette ligne, il donnerait le diamètre qui, projeté, fournirait le petit axe de la projection verticale. On peut encore se contenter de mener le diamètre uy qui est perpendiculaire à st. C'est celui qui doit donner ce petit axe. En effet, quand deux lignes dans l'espace sont perpendiculaires entre elles, et que l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, les projections de ces deux lignes sont perpendiculaires entre elles. Cela résulte de ce que, *fig.* 82, ab étant perpendiculaire à cd et aussi à la perpendiculaire cc' au plan, ab est perpendiculaire au plan projetant dcc', ainsi que sa parallèle

$a'b'$. Donc $a'b'$ est perpendiculaire à $c'd'$. Donc enfin, en revenant au problème proposé, nous avons déterminé les axes des deux ellipses, et nous pouvons les construire.

On peut déduire les axes de l'ellipse sur le plan V de l'ellipse sur le plan H. En effet, *fig.* 83, soit $abcd$ la projection horizontale, o, o', les projections du centre du cercle; ef parallèle à lt sera la projection horizontale du diamètre du cercle parallèle au plan V, et qui doit donner le grand axe de l'ellipse cherchée. Or, si l'on faisait tourner le cercle autour de ce diamètre jusqu'à ce qu'il devînt parallèle au plan V, ce cercle se projetterait suivant kmn décrit de o' comme centre avec ab comme diamètre, et dans ce mouvement les extrémités de la charnière, c'est-à-dire, celles du diamètre dont il est question, resteraient fixes; donc les extrémités de ce diamètre se projettent verticalement sur ce cercle en $e'f'$. Ramenant le cercle dans sa première position, $e'f'$ conserve sa position et sa grandeur, et c'est le grand axe de l'ellipse cherchée. Il reste à construire l'ellipse connaissant son grand axe et les deux points $a'b'$ projections de a et b.

Pour cela, nous ferons usage du théorème (31). Nous mènerons l'ordonnée $b'q'$ de l'ellipse, puis celle correspondante $p'q'$ du cercle décrit avec $e'f'$ pour diamètre. Nous mènerons $p'o'$, et $b'r'$ parallèle à $e'f'$. $r'o'$ sera le petit axe, car (31) $p'q' : b'q' :: p'o' : r'o'$.

Si le centre d'un cercle est donné dans un plan et son rayon, on peut rendre la construction plus simple, et trouver les projections du cercle en opérant le rabattement autour d'un diamètre parallèle à l'un des plans de projection. Soit gdg' le plan donné, *fig*. 84, c, c' le centre du cercle situé dans son plan, r son rayon. Le grand axe de la projection horizontale est ab double de r, et parallèle à la trace. Faisant tourner le cercle autour de ce diamètre dans l'espace, jusqu'à ce qu'il soit horizontal, ce cercle se projette suivant akb. Le demi-diamètre qui donne le demi petit axe et dont la projection est ck, est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un angle aigu est égal à celui que fait le plan avec le plan H. Cet angle est aisé à déterminer, § 48, et si l'on rabat ce triangle autour de son côté horizontal comme charnière, ce diamètre prendra la position *cd* qui fait avec *cf* l'inclinaison du plan avec l'horizon; *cd* est égal au rayon du cercle. Projetant *d* sur *af* en *f*, le point *f* est la projection de l'extrémité *d* du diamètre qui donne le petit axe.

La projection horizontale du cercle étant trouvée, on détermine comme précédemment sa projection verticale.

Pour projeter un cercle situé dans un plan vertical, et dont le rayon est donné, il faut faire tourner ce plan, *fig.* 84, autour du diamètre vertical du cercle jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical. Dans cette nouvelle position, le cercle se projette en véritable grandeur, et un point quelconque de ce cercle dont la projection horizontale est *h* a pour projection *h'*, et pour projection verticale *v'* ou *v''*. En ramenant les choses dans leur première position, le point *h'* revient en *h*, et le point *v'* ou *v''* devient *v* ou *v* sur une parallèle à la ligne de terre, et sur *h v* perpendiculaire à cette ligne. On projette ainsi tous les points du cercle. On peut se contenter de projeter les deux axes; *r r'* est le grand axe et *tt'* le petit obtenu par le diamètre *ss'*.

On obtiendrait de la même manière la projection verticale d'une courbe quelconque située dans un plan vertical, et qui serait donnée de grandeur naturelle dans son plan.

§ 52. *Diviser une circonférence en parties égales; trouver les projections d'une roue d'engrenage cylindrique.* — Dans les différents rabattements que nous venons d'opérer d'une circonférence de cercle, il est évident que pour diviser ses projections en parties qui représentent des parties égales de la circonférence, il suffit de diviser la circonférence rabattue en parties égales, et de relever tous ces points de division. On y parvient d'une manière fort simple, car les lignes de rabattement sont toutes parallèles entre elles. Ainsi, soit proposé de diviser le cercle de la *fig.* 84, en 12 parties égales, et de projeter les points de division. De même que le point f devient le point k dans le rabattement, de même tout point k revient se projeter en f sur la courbe et sur une perpendiculaire à la charnière. Si donc on divise le cercle rabattu en 12 parties égales, et si l'on trace les perpendiculaires à $a\,b$ par les points de division, on déterminera ainsi les divisions 1, 2, 3...., de l'ellipse.

On déduit immédiatement de là un moyen fort simple de projeter une roue d'engrenage cylindrique, placée sur un plan quelconque. On projette d'abord la circonférence primitive de cette roue. On projette également le cercle du creux, et enfin le cercle qui sert de limite aux dents. Soient ab, cd, ef, les grands axes des trois ellipses projections de ces cercles, *fig.* 85. L'un des petits axes étant déterminé, les autres s'en déduisent, parce que dans des ellipses semblables, les axes sont proportionnels. Divisant la circonférence primitive en 24 parties égales, par exemple, nombre des dents et des creux, nous aurons la naissance des faces et des flancs. Joignons ces points de division au centre o, et les parties de ces rayons interceptées par l'ellipse cd, détermineront les projections des creux. Pour déterminer la limite de la dent, nous diviserons d'abord la circonférence ef en 24 parties égales; puis, prenant la distance mn, *fig.* 86, du rayon du flanc à l'extrémité de la dent, portons la successivement sur circonférence efk, de m en n, de m' en n', *fig.* 85, et projetant les points n, n' sur l'ellipse ef nous aurons les extrémités des dents. S'il était nécessaire de déterminer des points des faces, intermédiaires entre la naissance et l'extrémité, on y parviendrait d'une manière analogue.

Maintenant, or perpendiculaire à ab, sera la projection horizontale de l'axe de la roue. Soit og le rabattement du diamètre situé dans le plan ak, supposé rabattu sur le plan H. ok, perpendiculaire à og, sera la perpendiculaire au plan, et si l'on prend op égale à l'épaisseur de la roue, or sera la projection de cette grandeur. r sera le centre d'autres ellipses égales aux précédentes. Mais on peut éviter la construction de ces nouvelles ellipses, pour terminer la projection de la roue, car il suffit évidemment de mener par tous les points de la dent, déjà déterminés, des parallèles à or, et égales à cette ligne.

La projection verticale se fait de la même manière.

§ 53. *Trouver les projections orthogonales d'un palier placé parallèlement aux plans de projection.* — En suivant les recommandations que nous avons faites § 28, nous nous aiderons, pour la détermination de cette projection, de la description géométrique de quelques parties de ce corps.

La partie de ce palier qui doit recevoir le coussinet, ayant la forme d'un prisme droit à base octogone régulière, occupons-nous de projeter ce prisme. Or, le plan de la base de ce prisme est ici supposé placé parallèlement au plan V, de sorte qu'elle se projette horizontalement sur la parallèle cc à la ligne de terre, *fig.* 87. Construisons l'octogone régulier quelconque, *fig.* 88. La partie creuse du palier aura la forme $cdabef$ qu'il est facile de projeter sur ab, quand on connaît seulement la longueur ab du côté de l'octogone. En effet l'angle abe est égal à l'angle bef. Donc les suppléments ebm et bem de ces angles sont égaux entre eux et par suite valent 45°. Donc bm est le côté du carré inscrit dans un cercle dont be ou ab est le diamètre. On trouvera donc ac, *fig.* 87, en décrivant sur aa qui représente ab de la *fig.* 88, un demi-cercle, élevant la perpendiculaire xy, et menant ya. On portera $ac = ya$ et $caac$ sera la projection horizontale de la base du prisme. La projection verticale de aa sera $a'a'$; celle de be, da, *fig.* 88, sera $a'c'$, *fig.* 87, en portant $a'c' = aa$. Enfin ef, *fig.* 88, est la moitié du côté de l'octogone; on portera donc, *fig.* 87, $d'c' = \frac{1}{2}aa$, et $a'c'd'$ sera la projection verticale de la base du prisme. Les arêtes ab, cd etc., se construisent aisément; on en a la longueur par le croquis. Les lignes ch, di déterminent les points h et i qui sont sur le diamètre du cercle efg dont la projection verticale est $e'f'g'$. Toutes les autres parties des projections se concluent aisément des cotes données par le croquis.

La figure 87 est au quart et la figure 88 à $\frac{1}{2}$.

§ 54. *Projections d'un cube, d'une pyramide régulière, d'une pyramide quelconque.* — Les élèves trouveront de nombreuses applications des rabattements dans l'ouvrage de M. Similien sur le dessin. Nous donnerons ici quelques développements, qui sont du ressort de la géométrie descriptive, sur quelques-uns de ces problèmes.

Rien de plus aisé que de projeter un cube posé sur le plan horizontal, quand on donne la position de sa base par rapport au plan vertical. On décrit un carré *abcd* dans cette position sur le plan H, *fig.* 89. Ce carré est la projection horizontale du cube. On projette tous ses sommets en *a'*, *b'*, *c'*, *d'* sur la ligne de terre; on élève des perpendiculaires égales aux côtés du cube, et ce dernier est également projeté sur le plan V.

Pour projeter une pyramide régulière, dont la base est placée sur le plan H, on construit dans ce plan un triangle égal à cette base, et dans la position qu'on veut lui donner par rapport au plan V. Soit *abc*, *fig.* 90, cette base, *s* le centre du cercle circonscrit; c'est le pied de la hauteur. Donc les arêtes se projettent horizontalement suivant *sa*, *sb*, *sc*. Leurs projections verticales passeront par *a'*, *b'*, *c'*. Pour trouver la projection verticale du sommet, nous supposerons que le plan déterminé par l'une des arêtes *sb* et la hauteur, tourne autour de cette dernière ligne, jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au plan V en *sx*. Dans cette position, le triangle rectangle que forme cette arête avec la hauteur, se projette verticalement en véritable grandeur. Or, ce triangle a pour hypoténuse l'arête, égale à *bc*, puisque la pyramide est régulière, et pour côté de l'angle droit *sx*; si donc on projette *sx* en *px'*, et que du point *x'* comme centre avec *bc* pour rayon, on décrit un arc de cercle, cet arc rencontre *s'p* en *s'* qui détermine *s'p* ou la projection de la hauteur de la pyramide. Donc enfin $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$ sont les projections verticales des arêtes.

Pour projeter une pyramide quelconque, également placée sur le plan H, on placera encore la base $a\,b\,c$ de cette pyramide sur ce plan, *fig.* 91. Puis, la longueur des arêtes étant donnée par le croquis de la pyramide, on supposera que le plan de chaque face tourne autour du côté qui est situé dans le plan H, pour se rabattre sur ce plan. On construira aisément le rabattement de chacune des faces, car on en connaîtra les trois côtés. Ces rabattements obtenus, il suffira de relever un des sommets s, s', s''. Ces points se projetteront horizontalement sur les perpendiculaires sk, $s'k$, $s''k$ abaissées sur les charnières $b\,c$, $a\,c$, $a\,b$ et par conséquent à la rencontre de ces lignes en k, qui est la projection du sommet de la pyramide. Pour avoir la hauteur, on emploiera le même procédé que ci-dessus, en construisant le triangle rectangle $pk'x'$ dont bs est l'hypoténuse et $b\,k$ l'autre côté, ou en rabattant le même triangle sur le plan H, où il prend la position $k\,k''\,b$, ce qui détermine encore $k\,k''$ qu'on porte de p en k', puis on joint $a'k'$, $b'k'$, $c'k'$.

§ 55. *Projection orthogonale d'un cube placé sur un plan quelconque dont les traces sont données.* — Pour résoudre ce problème, nous allons faire voir comment on conclut des projections d'un cube sur deux plans rectangulaires, sur l'un desquels il est posé, les projections de ce même cube sur les deux plans H et V, *fig.* 92.

Soient $m\,k$, $n\,k$, les traces du plan sur lequel le cube est posé; si nous supposons ce plan rabattu sur le plan H, il nous sera facile d'obtenir sur ce dernier le rabattement $a\,b\,c\,d$ de la base du cube; il suffira pour cela de supposer connue la position de cette base par rapport à la trace $m\,k$. Alors, comme dans le mouvement du plan autour de sa trace, chaque point du plan se rabat sur une perpendiculaire à la charnière menée par la projection horizontale de ce point, il s'ensuit que la base du cube se projettera sur les perpendiculaires $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, $d\,d'$ à la trace $m\,k$. De plus, comme les arêtes du cube sont perpendiculaires au plan mkn, elles seront comprises dans les plans des arcs de cercle décrits par les sommets, et se projetteront par conséquent sur les perpendiculaires aa', bb', cc' dd', à la trace km.

Projetons également le cube sur un plan mon perpendiculaire au plan donné, et au plan H. Ce plan rencontre le plan donné mkn suivant une ligne qui se rabat en mg. Il est évident que la projection de la base du cube sur ce plan, qui doit être située sur mg, occupera sur cette ligne la même position que la projection de la même base sur une perpendiculaire à km comme xy prise dans le plan H. Si nous projetons donc $abcd$ sur xy, et si nous rapportons les points p,q,r,s, en p',q',r',s', ces derniers points seront les projections de la base du cube sur le plan mon, ce plan étant supposé rabattu sur le plan H. Mais, comme précédemment, ces points se sont rabattus sur deux perpendiculaires à la charnière om menées par leurs projections horizontales. Donc $p'a'$, $q'b'$, $r'd'$, $s'c'$ sont ces perpendiculaires, et leur rencontre avec les premières aa', bb', cc', dd' détermine la projection $a'b'c'd'$ de la base du cube. De plus, les arêtes du cube se projetient sur le plan mon rabattu suivant $p't'$, $q'u'$, $r'v'$, $s'z'$, comme elles se projetaient sur xy suivant pt, qu, rv, sz, et les sommets de la base supérieure se sont toujours rabattus suivant des perpendiculaires à la charnière om. Donc ces sommets se projetteront horizontalement suivant les perpendiculaires $t'e'$, $u'f'$, $v'h'$, $z'g'$ qui par leur rencontre avec aa', bb', cc', dd', déterminent la projection $e'f'g'h'$ de la base supérieure.

Pour avoir la projection verticale des bases du cube, il suffit maintenant d'élever par les points a', b', c', d', e', f', g', h' des perpendiculaires à la ligne de terre lt, et de prendre à partir de cette ligne, sur ces perpendiculaires, des distances égales respectivement à celles des points p',q',r',s',t',u',v',z', qui expriment les hauteurs des sommets au-dessus du plan H.

On a donc ainsi les deux projections $a'b'c'd'$, $a''b''c''d''$ du cube sur les deux plans H et V.

§ 56. *Usage du problème précédent pour projeter orthogonalement un corps placé sur un plan quelconque. — Remarque sur les échelles.* — M. Similien a ingénieusement appliqué le problème précédent à la détermination des projections d'un corps placé sur un plan quelconque. Pour cela, il le suppose posé sur le plan, de manière que ses dimensions principales soient parallèles aux arêtes du cube. Alors, ces dimensions se projetteront suivant des parallèles aux lignes $c'b'$, $c'd'$. $c'g'$ sur le plan H, ou suivant des parallèles aux lignes $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$ sur le plan V, suivant qu'on veut obtenir la projection sur H ou sur V. Pour déterminer la longueur de ces dimensions, il construit trois échelles sur les trois arêtes $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$, *fig.* 92, qu'il appelle échelle de profondeur, de largeur, de hauteur; il rapporte les dimensions du corps sur le dessin, à l'aide de ces échelles, et ces dimensions se trouvent déterminées, puisqu'on connaît leur direction et leur grandeur.

Ce principe repose sur ce que les projections des dimensions d'un corps doivent être proportionnelles aux projections des arêtes du cube.

Pour rendre sensible ce que nous venons de dire par un exemple, proposons-nous de projeter sur le plan V, le modèle de palier dont nous nous sommes déjà occupés. Les directions $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$ des arêtes du cube, étant rapportées sur le dessin, *fig.* 93, en cb, cd, cg, nous prendrons cb pour profondeur, cd pour largeur et cg pour hauteur.

Ayant construit les trois échelles, nous mesurerons kk sur l'échelle de profondeur, kl sur celle de largeur, kk' sur celle de hauteur. Nous achèverons la base du palier. Pour tracer la partie creuse, nous prendrons ke sur l'échelle de largeur, puis ef, fg, gh, hi sur celle de profondeur, fm, gn, go, hp sur celle de hauteur. gh, on le sait § 53, doit être pris égal au côté du carré inscrit dans un cercle dont le côté de l'octogone est le diamètre. On joint op, et l'on prend pq sur l'échelle de profondeur. Pour projeter le cylindre, on projette l'axe en ss' parallèle à kk' sur l'échelle de hauteur; puis on projette les cercles dont les centres sont en s et s', puisqu'on peut connaître leur inclinaison sur le plan H. On répète les mêmes constructions sur la partie symétrique. Nous terminerons cette projection en menant des tangentes aux ellipses, parallèlement à kk'.

Il est à remarquer que le grand axe de l'ellipse s', parallèle à la trace verticale du plan § 41, est perpendiculaire à la hauteur du cube, § 75, et comme il se projette en véritable grandeur, on peut donc construire ces ellipses par le moyen de leurs axes.

Pour lever toutes les difficultés qui pourraient naître dans l'esprit des élèves touchant la construction des échelles qui sont nécessaires pour exécuter le genre de projection que nous venons d'étudier, nous entrerons dans quelques détails à ce sujet.

Ces échelles doivent avoir pour but de faire retrouver en mètres les dimensions des arêtes des corps à dessiner, qui sont parallèles aux arêtes du cube que nous avons projeté, *fig.* 92. Or, quelle que soit la grandeur du côté ab de ce cube, les trois arêtes projetées $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$, seront généralement plus petites que ce côté, ou bien une ou deux au plus seront égales à ce côté. Pour tracer les trois échelles, nous construirons donc, par le moyen connu en géométrie, trois lignes proportionnelles aux lignes $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$. Nous diviserons chacune de ces trois lignes en dix parties égales, et nous appellerons ces subdivisions, des millimètres ou des centimètres. Il est clair en effet que sur chacune des trois échelles, chaque subdivision représente le dixième de l'arête du cube qui lui correspond; et si l'on convient d'avance que ces subdivisions représentent des millimètres mesurés sur des lignes respectivement parallèles aux arêtes du cube, si le corps est de petite dimension, ou des centimètres s'il est assez volumineux, alors les dimensions du corps, parallèles aux arêtes du cube, étant prises sur le croquis, on peut, à l'aide des trois échelles, les rapporter sur un dessin; et réciproquement, quand on voudra retrouver à l'aide du dessin, une dimension quelconque du corps dessiné, en mètres, l'échelle qui correspond à cette dimension la reproduira.

Mais, en agissant ainsi généralement, nous ignorons à quelle échelle le corps a été dessiné, c'est-à dire si c'est à la moitié, au tiers, au cinquième, etc.

Lorsqu'on dessine à une seule échelle, pour connaître cette échelle, il suffit de diviser la longueur en mètres d'une ligne du dessin, par la longueur de cette ligne prise sur le corps lui-même. Mais ici, la même ligne pouvant être exprimée, suivant sa direction, par trois quantités différentes, il s'ensuit que la profondeur sera dessinée à une certaine échelle la largeur à une autre, et la hauteur à une troisième. Seulement, si l'on voulait savoir le rapport d'une ligne du dessin à celle qui représenterait la ligne du corps, projeté en grandeur naturelle, il faudrait alors prendre une ligne du dessin parallèle à la trace verticale du plan, l'évaluer en mètres, et chercher son rapport avec la véritable ligne du corps. Par exemple, dans la *fig.* 93, le grand axe de l'ellipse n'est pas altéré par la projection; il se projette en vraie grandeur, cette grandeur est de 18^{mm}, le diamètre de ce cercle est de 36^{mm}, dont le palier est dessiné à moitié. Mais il faut entendre par là qu'une ligne du dessin est moitié de ce que serait la projection de cette ligne, si le corps était projeté en vraie grandeur.

Inversement, on peut déterminer ce dernier rapport en partant pour construire les échelles d'un cube dont le côté soit donné en mètres. En effet, supposons, comme cela a lieu dans la *fig.* 92, que le côté du cube ab ait 2 centimètres. Aucune des dimensions $c'' b''$, $c'' d''$, $c'' g''$, de la projection, n'a 2 centimètres; et si nous prenons la moitié de chacune de ces lignes, cette moitié représentera respectivement un centimètre. Si donc nous divisons cette moitié en dix parties égales, chacune de ces parties représentera un millimètre sur le dessin que nous voulons exécuter. Alors, construisant les trois échelles d'après ces trois unités, il est clair que tout corps dessiné à l'aide de ces échelles, sera projeté en grandeur naturelle. Maintenant, si nous voulons que le corps soit dessiné à la moitié, au tiers, au quart, etc., au lieu de diviser en dix parties égales la moitié de chaque arête de la projection du cube, nous diviserons en dix parties pour avoir également des millimètres, la moitié, le tiers, le quart, etc., de cette même moitié. De cette sorte encore le corps sera dessiné à moitié, au tiers, au quart, etc., c'est-à-dire que les trois dimensions de cette projection seront la moitié, le tiers, le quart, etc, de ce qu'elles seraient si le corps était projeté en grandeur naturelle.

Il est aisé de voir que, dans ce genre de dessin, on peut aussi bien obtenir des arêtes quelconques du corps, que des arêtes parallèles aux arêtes du cube. En effet, un point peut toujours être déterminé par deux lignes parallèles à deux des arêtes du cube, et mesurées sur le croquis. Par exemple, pour projeter une auge de meule, *fig.* 94, dont les pieds ne sont pas dans des plans verticaux, nous trouverons le pied en prenant la hauteur $h\,h'$ sur l'échelle de hauteur, mesurant et menant $h\,k$ sur la largeur et $k\,x$ sur la longueur, ce qui détermine le pied x. Si le pied était dans le plan vertical $h'\,h\,k$, $h\,k$ mesuré sur l'échelle de largeur donnerait pour pied le point k. C'est ainsi, *fig.* 93, que $o\,g$ ligne qui ne doit pas être tracée sur le dessin, puisqu'elle n'est pas sur le modèle, a donné le point o.

§ 57. *Procédé général pour trouver la projection oblique d'un corps.*— Le problème du § 35, qui enseigne à déterminer les traces d'une droite sur les plans de projection, nous fournit le moyen d'établir immédiatement le principe fondamental sur lequel les projections obliques sont fondées. En effet, d'après ce que nous avons déjà dit, § 29, par chaque point d'un corps dont les projections sont données, il suffit de mener une parallèle à une ligne convenue, servant à diriger les lignes projetantes, et de chercher les traces de ces lignes sur les plans de projection. L'ensemble de ces traces forment la projection oblique du corps.

Nous supposerons ici, comme au § 53, que les trois dimensions du corps à projeter sont parallèles aux plans de projection. Il suit de là que si nous menons par les extrémités d'une verticale comme a, $a'a''$, *fig.* 95, deux lignes projetantes ab, $a'b'$ et ab, $a''b''$, la droite $b'b''$ qui sera la projection oblique de la droite a, $a'a''$, sera égale et parallèle à cette droite. De même, une parallèle $a\,b$, $a'b'$, a la ligne de terre, aura pour projection oblique $a''b''$ égale et parallèle à $a\,b$, $a'b'$. Conséquemment, dans ce mode de projection, la hauteur et la longueur seront projetées en véritable grandeur, et sans changer de direction par rapport aux plans de projection.

Si nous prenons maintenant une perpendiculaire a, $a'a''$ au plan vertical, sa projection oblique $b\,b'$ n'aura plus la direction, ni la grandeur de la droite a, $a'a''$. Mais, pourvu que nous conservions aux lignes projetantes leur direction, toutes les dimensions du corps à projeter, qui sont perpendiculaires au plan vertical, se projetteront suivant des lignes proportionnelles à leurs grandeurs; et si nous remarquons que, en changeant la direction des lignes projetantes, la grandeur de la projection peut surpasser la ligne elle-même ou être plus petite qu'elle, et qu'on peut ainsi la faire varier autant qu'on le veut, il s'ensuit qu'on pourra choisir la projection verticale qui aura avec la ligne donnée le rapport de grandeur le plus simple possible, comme celui de 1 à 1, de 1 à 2, de 1 à 3, etc. Alors toutes les lignes du corps qui seront perpendiculaires au plan vertical seront représentées sur cette projection par d'autres lignes qu'il suffira de multiplier par 1, par 2 ou par 3, etc., pour avoir leur grandeur réelle.

Cette projection, à l'aide d'une seule échelle, ou de deux ayant le rapport de 1 à 2, ou de 1 à 3, etc., pourra donc servir à retrouver les trois dimensions d'un corps par le secours du dessin. Enfin, cette projection aura l'avantage de ne pas déformer le corps, puisque deux de ses dimensions conservent leur grandeur et leur direction.

Il reste à déterminer la direction de la ligne projetante qu'on peut choisir le plus généralement. Le plus simple de tous les rapports est celui de 1 à 1, mais les figures ont moins de grâce que dans celui de 1 à 2. Nous prendrons donc une projection $a'b'$ *fig.* 96, qui soit la moitié de la longueur $a\,a'$ qui lui correspond. Mais comme on peut varier à l'infini les deux projections d'une droite qui donnerait une projection oblique deux fois plus petite qu'elle, comme on le voit par la figure, nous allons aussi fixer l'angle que doit faire la projection verticale avec la ligne de terre. Les angles les plus aisés à construire, sont ceux de 45° et de 30°. En effet, *fig.* 97, si l'on fait $b\,c = a\,b$, et qu'on joigne $a\,c$, cette ligne est inclinée de 45° sur $a\,b$. Si l'on décrit du point d comme centre avec $d\,e$ pour rayon, un cercle, et qu'on porte $d\,e$ de e en f, le triangle $d\,e\,f$ est équilatéral, l'angle $d\,e\,f$ est de 60°, et par conséquent $f\,e\,g$ est de 30°.

Nous choisirons l'angle de 30° et le rapport de 1 à 2, pour les exemples que nous donnerons. Ainsi, pour trouver les projections de la direction des lignes projetantes, *fig.* 98, nous mènerons une ligne $a'\,b'$ inclinée de 30° sur la ligne de terre, sur laquelle nous prendrons une distance $a'\,b'$ quelconque; nous mènerons $a'\,a$ perpendiculaire à la ligne de terre et double de $a'\,b'$; alors $a\,b$ et $a'\,b'$ seront les projections de la direction des lignes projetantes.

§ 58. *Un point étant donné, trouver sa projection oblique.* — Cette question peut être résolue de deux manières. Si le point est donné par ses deux projections h et v, *fig.* 99, on mène une parallèle $h\,h'\;v\,v'$ à la direction des lignes projetantes, et sa trace v' sur le plan V est la projection oblique du point h,v. Ou bien encore, au lieu de tracer $h\,h'$, on porte la moitié de $h\,p$ de v en v'.

Le point étant donné par sa projection v et sa distance au plan V, il n'est pas nécessaire de tracer sur le dessin la projection horizontale h; on se contente de mener $v\,v'$ et de prendre cette ligne égale à la moitié de la distance du point au plan V.

§ 59. *Trouver la projection oblique d'une ligne inclinée d'une manière quelconque sur les plans H et V.* — Le paragraphe précédent nous donne la solution de cette question, car pour projeter une droite, il suffira d'en projeter les deux extrémités, ce qui exigera les données indiquées par le § 57, *fig.* 100.

§ 60. *Trouver la projection oblique d'un chapeau de palier et d'un coussinet.* — L'avantage de connaître le rapport de la projection oblique d'une perpendiculaire au plan V, à la ligne qu'elle représente, permet le plus souvent de trouver la projection oblique d'un corps sans être obligé de connaître ses projections. Dans ce cas la projection verticale seule de la direction des lignes projetantes doit être donnée. Soit proposé de projeter obliquement le chapeau du palier que nous avons projeté orthogonalement. Le croquis de ce corps étant fait, nous dessinerons la face *a b c d e f*, *fig.* 101, comme elle l'est dans le modèle, à l'échelle donnée, ainsi que les parties *gh*, *i k l*, *hi*, *l h*. Les arêtes *a a'*, *b b'*, *ii'*, *ll'*, etc., seront menées à 30°, et deux fois plus petites que le croquis. Les cercles *ikl*, *i' k' l'* doivent être décrits des points *o* et *o'* comme centre. Pour projeter les cercles horizontaux *mnp*, nous mènerons dans un cercle du rayon donné *fig.* 102, deux diamètres rectangulaires *a b*, *cd*. Nous diviserons *cd* en quatre parties égales. Alors *a b* se projettera obliquement suivant *a' b'* = *a b*. *o e*, *o c*, *o f*, *o d*, se projetteront en *o'e'*, *o'c'*, *o' f'*, *o' d'*, deux fois plus petites qu'elles; menant les parallèles *pq*, *xy*, leurs projections seront *x'y'*, *p'q'* telles que *xy* = *x'y'*, *pq* = *p' q'*. C'est ainsi qu'on déterminera les bases des deux cylindres, et on les reliera par des tangentes communes.

On trouvera de la même manière la projection oblique du coussinet *abcdef*, *a' d' e' f'*, *fig.* 103.

§ 61. *Projection oblique d'un cube placé sur un plan quelconque.* — On peut également se proposer, comme dans les projections orthogonales, de trouver la projection oblique d'un cube placé sur un plan quelconque. Soit *a' b' c' d' e' f' g' h'* la projection orthogonale d'un cube placé sur le plan *mnk*, *fig.* 104, projection obtenue comme au § 55. Pour avoir la projection oblique, il suffira de mener par tous les sommets, des lignes inclinées à 30° sur la ligne de terre, et de porter sur ces lignes des longueurs respectivement égales aux moitiés des distances des points a, b, c, d, e, f, g, h, à la ligne de terre.

§ 62. *Usage du problème précédent pour projeter obliquement un corps placé sur un plan quelconque.* — Comme au § 56, on construit ici trois échelles sur les trois arêtes $c''b''$, $c''d''$, $c''g''$, *fig.* 104 ; on suppose le corps placé sur le plan comme l'est le cube précédent, et l'on prend les longueurs sur l'échelle construite sur $c''g''$, les largeurs sur l'échelle $c''d''$, et les hauteurs sur l'échelle $c''b''$.

Proposons-nous pour exemple de trouver la projection oblique du coussinet du § 60. Soient cb, cd, cg, les trois directions des projections obliques des arêtes du cube, *fig.* 105. Nous prendrons fh parallèle à cg sur l'échelle de longueur, ainsi que ho qui est le côté du carré dont fh est la diagonale. On en conclura io parallèle à bc et pris sur l'échelle de hauteur. De ho et io, on conclut la ligne inclinée hi. ik parallèle à cb est pris sur l'échelle de hauteur, km, np.... sur l'échelle de longueur. Pour les courbes, on en cherchera quelques points en construisant le demi-cercle xyz, prenant ty sur l'échelle de hauteur, et le portant de t' en y'; puis, prenant le milieu o, on porte sz en $s'z'$ sur l'échelle de longueur.

§ 63. *Deux plans parallèles ont leurs traces respectivement parallèles. Par un point donné mener un plan parallèle à un plan donné.* — Soient bac, *fig.* 106, le plan donné, et h, v, le point donné. Les traces du plan cherché devront être respectivement parallèles à celles du plan donné, comme intersections de deux plans parallèles par un troisième (66). Il suffit donc de déterminer un point de chacune d'elles. Menons par le point donné et dans le plan cherché une horizontale; elle aura pour projection horizontale une droite parallèle à la trace horizontale de ce plan, et par conséquent parallèle à la trace ab du plan donné § 41 ; sa projection vertiticale sera parallèle à la ligne de terre. Donc hh', vv' sont les projections de cette horizontale. Le problème est maintenant résolu, car menant $v'a'$ parallèle à ca, cette ligne sera la trace verticale du plan cherché, et $a'b'$ parallèle à ab en sera la trace horizontale. Comme vérification de l'épure, nous pouvons mener par le point h, v, une parallèle au plan V dans le plan, et cette nouvelle droite doit avoir sa trace sur $a'b'$.

La même figure présente le même problème résolu dans des positions particulières du plan donné. Nous nous arrêterons au dernier cas, celui où le plan donné est parallèle à la ligne de terre.

Par le point donné nous ferons passer un plan qui coupera le plan donné suivant une droite. Nous mènerons par le point une parallèle à cette intersection, qui sera contenue dans le plan cherché, et qui percera les plans de projection sur les traces du plan.

Soient ab, $a'b'$ les traces du plan, h et v les projections du point; faisons passer par ce point un plan perpendiculaire à lt, et rabattons ce plan, son intersection avec le plan, et le point donné, sur le plan H; si par le point k rabattement du point, nous menons kg parallèle au rabattement mn de l'intersection, cette droite sera contenue dans le plan cherché. Elle perce le plan H en g, § 47, *fig.* 65, et le plan V en r. Donc cd et $c'd'$ sont les traces du plan cherché.

§ 64. *Trouver l'intersection de trois plans.* — Trois plans se coupent en un seul point : c'est celui où l'un des plans rencontre l'intersection des deux autres. Pour déterminer ce point, il suffit de déterminer l'intersection de l'un des plans avec chacun des deux autres, et le point de rencontre de ces deux droites sera le point commun aux trois plans, comme le point de rencontre des deux traces d'un plan est le point commun aux trois plans H, V et le plan donné. Soient bac, $b'a'c'$, $b''a''c''$, *fig.* 107, les trois plans donnés. Les deux premiers se coupent suivant hh, vv; les deux derniers suivant $h'h'$, $v'v'$: ces deux droites se coupent au point r, r' qui est le point cherché. Si l'on cherche l'intersection des deux plans bac, $b''a''c''$, cette droite $h''h''$, $v''v''$ doit passer par le point r, r'.

Le point i, i', de la *fig.* 72, est le point de rencontre des trois plans ab, $a'b'$, cd, $c'd'$, vph.

§ 65. *Par une droite donnée mener un plan parallèle à une autre droite donnée.* — Pour qu'un plan soit parallèle à une droite, il suffit qu'il contienne une parallèle à cette droite. Si donc par un point de la première droite, nous menons une parallèle à l'autre, le plan qui passera par les deux droites qui se coupent sera le plan demandé.

Soient ab, $a'b'$, *fig.* 108, la première droite, cd, $c'd'$ la seconde. Soit h, v un point pris sur ab, $a'b'$. Par ce point nous menons ef, $e'f'$ parallèle à cd, $c'd'$. Les deux droites qui se coupent, déterminent le plan cherché dont les traces sont ss, $s's'$, § 50.

Si l'une des droites était la ligne de terre, soit ab, $a'b'$ la première droite, *fig.* 109. Le plan cd, $c'd'$, mené par ab, $a'b'$ parallèlement à la ligne de terre est le plan cherché.

§ 66. *Par un point donné mener un plan parallèle à deux droites données.* — Par le point donné nous mènerons une droite parallèle à chacune des deux droites données. Le plan qui passera par ces deux droites sera le plan cherché.

Soient ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$ les droites données, h, v le point donné, *fig.* 110. Les parallèles $a''b''$, $a'''b'''$ et $c''d''$, $c'''d'''$, menées par le point h, v, déterminent par leurs traces celles du plan cherché ; ces traces sont xy, yz.

Si l'une des droites était la ligne de terre, soit ab, $a'b'$ la seconde, *fig.* 111, h, v le point donné. La parallèle $a''b''$, $a'''b'''$ menée par ce point détermine par ses traces celles du plan cherché, en les menant parallèlement à la ligne de terre.

§ 67. *Par un point donné mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans le même plan.* — Par le point donné et chacune des droites nous ferons passer un plan. Ces deux plans se couperont suivant une droite qui passera par le point donné, et qui rencontrera les deux droites données.

Soient *a b*, *a' b'*, *c d*, *c' d'* les deux droites données, *fig.* 112, *h*, *v*, le point donné. On trouvera *g k m* pour le plan mené par *h*, *v*, et *a b*, *a' b'*, et *g' k' m'* pour celui mené par *h*, *v* et *c d*, *c' d'*. Ces deux plans se coupent suivant une droite *p q*, *p' q'*, qui passe par *h*, *v*, et qui coupe les droites données aux points *h'*, *v'* et *h''*, *v''*.

La *fig.* 113 fait voir le cas où l'une des droites serait verticale et l'autre horizontale. *a*, *b b'*, et *c d*, *c' d'* sont les deux droites; *h*, *v*, le point, *h h'*, *v v'* la droite cherchée.

La *fig.* 114 donne celui où l'une des droites serait la ligne de terre et l'autre la verticale *a*, *b b'*. Soit *h*, *v* le point donné. Le plan qui passe par la verticale et le point *h*, *v* est le plan *a k g*. Ce plan et celui qui contient *l t* et le point donné ont déjà le point *k* commun; comme de plus l'intersection contient le point *v*, *h*, la droite cherchée est *k h*, *k v*, qui rencontre les deux droites aux points *a*, *a'* et *k*.

§ 68. *Mener une droite qui en rencontre deux autres non situées dans le même plan, et qui soit parallèle à une troisième.* — Ce problême se résout comme le précédent, si ce n'est que, au lieu de faire passer des plans par le point et chacune des droites, on fait passer des plans parallèles à la troisième droite par chacune des deux premières, et l'on cherche leur intersection commune.

La figure 115 présente ces deux cas : Lorsque les trois droites sont quelconques; lorsque les deux premières sont l'une verticale, l'autre horizontale, la troisième est la ligne de terre. *a*, *b b'* est l'une des lignes, *cd*, *c' d'* l'autre. La ligne cherchée est *a h*, *c v*.

§ 69. *Transmettre l'action d'une force d'une direction donnée en une autre également donnée, et non située dans le même plan.* — Ce problême peut se résoudre à l'aide de l'un des deux paragraphes précédents. Lorsqu'on a trouvé une droite qui coupe les deux directions données, on place une poulie dans l'un des angles et une seconde poulie dans l'autre. La même corde opère la transmission désirée.

§ 70. *Trouver le point de rencontre d'une droite et d'un plan.* — Nous mènerons par la droite donnée un plan quelconque. Ce plan coupera le plan donné suivant une droite qui contiendra le point cherché ; et comme il doit aussi se trouver sur la droite donnée, il se trouvera à la rencontre de ces deux lignes.

Soit bac le plan donné, *fig.* 116, et dg, $d'g'$, la droite donnée. Menons par la droite un plan vertical. Sa trace horizontale est la projection dg de la droite donnée, sa trace verticale est gk. L'intersection de ces deux plans est dg, mk, qui coupe la droite donnée au point h, v. C'est le point cherché.

On peut, comme vérification, faire passer un autre plan par la droite, comme par exemple $d'g'k'$, son plan projetant vertical. L'intersection de ce plan et du plan donné doit également passer par h, v.

Supposons le plan ab, $a'b'$ parallèle à la ligne de terre, *fig.* 117, et la droite o, $o'o''$ verticale, menons par la droite un plan perpendiculaire à la ligne de terre. Ce plan coupe le plan donné suivant gk rabattu. La verticale se rabat en om, et le point m est le point de rencontre rabattu. En relevant ce point, on trouve o, v pour ses projections.

La droite r, $r'r''$ étant verticale, et le plan cd horizontal, *fig.* 117, le point de rencontre a pour projections r, r'.

La droite étant quelconque ef, $e'f'$, et le plan vertical pqs, le point de rencontre est t, t'.

§ 71. *Construire les projections d'un parallèlipipède connaissant la diagonale donnée de grandeur et de direction, et les directions des arêtes.* — Soient ad, $a'd'$ *fig.* 118, les projections de la diagonale donnée ad, *fig.* 119, ak, $a'k'$, am, $a'm'$, an, $a'n'$ les projections des directions des arêtes.

Pour première solution, on peut mener, par l'extrémité d de la diagonale, trois plans respectivement parallèles à ceux déterminés par les directions données, et chercher leurs intersections mutuelles. On peut encore mener par le point d une parallèle à l'une des arêtes ak qui rencontre le plan des deux autres en h, ce qui détermine la face $ache$ et l'arête dh. Il suffit ensuite de construire un parallélipipède connaissant une face et une arête.

Pour résoudre la question par la géométrie descriptive, nous mènerons par le point d, d', la parallèle dh, $d'h'$, à ak, $a'k'$. Nous chercherons l'intersection $h\,h'$ de cette droite avec le plan $po, p'o'$ des deux autres arêtes. Avec le point h, h' et les droites am, $a'm'$, an, $a'n'$ nous construirons un parallélogramme $ache$, $a'c'h'e'$, et sur cette face et l'arête dh, $d'h'$ nous achèverons les projections du parallèlipipède.

§ 72. *Ombre d'une auge de meule.* — Les problèmes des §§ 35, 43 et 70 conduisent à la détermination de l'ombre portée par un polyèdre sur les plans de projection ou sur d'autres corps, ou enfin sur eux-mêmes. En effet, pour trouver l'ombre portée par un polyèdre, il faut supposer qu'un rayon lumineux suit tous les contours de ce corps et qu'il engendre ainsi une surface qu'on nomme *surface d'ombre*; que cette surface rencontre sur son passage, soit les plans de projection, soit quelques parties du corps lui-même, soit enfin d'autres corps. Alors les intersections de cette surface avec ces plans ou ces corps, limitent sur ces derniers la portion de surface qui ne reçoit pas de lumière, c'est-à-dire *l'ombre portée*; or, le rayon lumineux, en suivant les contours d'un polyèdre, qui sont rectilignes, tracera nécessairement une série de plans, et les intersections de ces plans avec les objets qu'ils rencontrent déterminent l'ombre portée du polyèdre sur ces corps. Tout se réduit donc, pour trouver l'ombre portée, à trouver des intersections de plans, ou de droites et de plans, quand il s'agit des plans de projection seulement. On remarquera d'ailleurs que pour trouver l'ombre d'une arête, on pourra, ou mener par cette droite un plan parallèle à la direction de la lumière, et déterminer ses intersections avec tout ce qu'il rencontre; ou bien, si cette intersection ne doit avoir lieu que sur les plans de projection, se contenter de trouver l'ombre portée par chacune des extrémités de l'arête, et de les joindre par une droite. Cette droite sera aussi la trace du plan d'ombre sur les plans de projection.

Pour rendre sensible ce que nous venons de dire par un exemple, nous choisirons pour objet l'auge de meule représentée § 56, *fig.* 94. Ses projections horizontale et verticale, *fig.* 120, sont *dbcd*, *a'b'c'd'*. Soit *ll*, *l'l'*, la direction des rayons lumineux. L'ombre des bras *cd*, *c'd'*, s'obtiendra en menant des parallèles à la lumière par leurs extrémités, et cherchant la trace verticale de ces rayons, puisque leur ombre se porte sur le plan vertical. On aura l'ombre des traverses *b b* de la même manière, et l'on obtient pour limite de l'ombre portée *mn*, dont la partie utile est *mo*. Enfin, pour obtenir l'ombre portée par le pied *ab*, il faut mener par l'arête *a b* un plan parallèle à *ll*, *l'l'*, ce qui se fait en menant par le point *b* un rayon lumineux, et cherchant ses traces *h*, *i* sur les plans de projection. Joignant *a i*, on a la trace horizontale, et *g h* est la trace verticale. L'ombre portée par le pied sur le plan horizontal, se porte donc également sur le plan vertical. L'ombre des autres pieds a été déterminée de la même manière.

§ 73. *Des coupes.* — La recherche du plan de rencontre d'une droite et d'un plan conduit à la détermination des coupes dans les polyèdres. Ces coupes sont destinées à fournir de nouvelles indications sur les corps à dessiner, et principalement à faire mieux connaître les parties évidées.

On emploie ordinairement, pour exécuter les coupes, des plans parallèles aux arêtes principales des corps. Les intersections sont alors plus faciles à obtenir; dans ce cas la figure des coupes a beaucoup d'analogie avec les projections orthogonales des corps, si l'on place les arêtes principales parallèlement aux plans de projection. Ainsi, la projection horizontale et la coupe du chapeau de la figure 101, ont également la forme représentée *fig.* 121. La coupe faite par un plan horizontal passant par *b* et *e*, *fig.* 101, serait

$gaa'g'o$, $fgkg'f'$, *fig.* 121. Celle faite par un plan vertical parallèle à ll', et passant par k, *fig.* 101, serait $abcdef$, *fig.* 122.

On a coutume, dans les coupes, d'enlever l'une des parties du corps, située de l'un des côtés du plan de la section, et de projeter l'autre partie, même les parties cachées, c'est ce qui a été fait dans les *fig.* 121 et 122. On met des hachures dans les parties pleines des coupes.

§ 74. *Trouver la distance de deux points donnés par leurs projections.* — Soient h, v, et h', v', *fig.* 123, les points donnés. hh' et vv' seront les projections de la ligne qui joint ces points ou les projections de leur véritable distance dans l'espace. Pour trouver cette distance, nous remarquerons qu'elle est, dans le plan projetant de la droite sur le plan H, le quatrième côté d'un trapèze dont la base est hh' et dont les côtés parallèles sont les deux distances des points donnés au plan H, mesurées par les deux lignes vp, $v'p'$. En rabattant ce plan projetant sur le plan H, et toutes les parties de ce trapèze, nous pourrons en conclure le quatrième côté, ou la longueur de la distance cherchée. Or les points h, v et h', v' (§ 46, *fig*, 58) se rabattent sur les perpendiculaires hk, $h'k'$, en k et k' tels que $hk = vp$ et $h'k' = v'p'$. Donc kk' est le rabattement de la ligne qui joint les deux points dans l'espace; cette ligne exprime donc la véritable distance qui sépare ces deux points.

On peut opérer ce rabattement d'une autre manière : On remarque aisément que si par le point k on mène une parallèle kg à hh', la distance cherchée kk' n'est autre chose que l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés kg est égal à la projection horizontale hh', et l'autre côté gk' est la différence entre les deux distances $v'p'$ et vp, hauteurs des deux points au-dessus du plan H. Ce triangle rectangle peut être construit partout sur l'épure avec ses deux éléments hh' et $v'g'$, mais on peut imaginer que ce triangle tourne autour de la verticale du point h', jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan V, § 48. Dans cette position, ce triangle se projette verticalement en véritable grandeur. La charnière parallèle à $v'g'$ se projette suivant cette ligne, et l'autre côté égal à hh' suivant $v'g'$. Si donc on porte hh' de g' en k'', le triangle $k''v'g'$ sera la projection de celui de l'espace en grandeur naturelle, et $v'k''$ sera la distance cherchée.

Le transport de la ligne hh' s'opère par l'arc de cercle hq se terminant à $h'q$ parallèle à lt. $h'q$ se transporte en $g'k''$ par la perpendiculaire qk'' à lt.

Lorsque les deux points sont placés dans un plan parallèle à l'un des plans de projection, la ligne qui les joint est alors une parallèle au plan H, ou une parallèle au plan V, et la distance des deux points se projette en véritable grandeur sur l'un ou l'autre de ces deux plans.

Ainsi, *fig.* 124, hh' est la véritable distance des points h, v, h', v', ou a, h, et a, h'; *fig.* 125, vv' est la distance des deux points h, v, h', v' ou a, v et a, v'.

Pour avoir la distance de deux points h, v, k', v' situés dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre *fig.* 126, il suffit de rabattre ces deux points (§ 46, *fig.* 60), la distance kk' est la grandeur cherchée.

La distance d'un point h, v d'une droite, *fig.* 127, au point r où elle perce le plan horizontal, se trouve aisément en rabattant le plan projetant de cette droite, et la droite elle-même. Le point h, v se rabat en k; le point r reste fixe. Donc rk est le rabattement de la droite ou la distance cherchée.

La distance du point h, v, au point a situé sur lt, *fig*, 128, a pour projection ah et av, et se rabat en ak qui est la véritable grandenr de cette distance.

§ 75. *Trouver la distance d'un point à un plan.* — On démontre en géométrie que la plus courte distance d'un point à un plan est mesurée par la perpendiculaire abaissée du point sur le plan. En géométrie descriptive, nous aurons donc plusieurs problèmes à résoudre pour arriver à la solution, car, il faudra : 1° *Trouver les projections d'une perpendiculaire abaissée du point sur le plan;* 2° *déterminer* *le point de rencontre de cette perpendicnlaire et du plan*; 3° *chercher la distance entre le point donné et le point de rencontre.* Nous savons résoudre les deux derniers problêmes. Cherchons la solution du premier. Nous démontrerons pour cela le principe suivant :

Lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, ses projections sont perpendiculaires aux traces du plan. En effet, le plan qui projette la droite horizontalement est perpendiculaire au plan horizontal, il l'est aussi au plan donné, puisqu'il passe par la droite (77), donc la trace du plan est perpendiculaire au point projetant (79), et par suite à la projection de la droite qui passe par son pied dans ce plan.

On conclut de là que, pour abaisser d'un point donné, *h*,*v*, *fig.* 129, une perpendiculaire sur un plan *bac*, il suffit d'abaisser des projections *h* et *v* des perpendiculaires respecti ves aux traces du plan.

Pour terminer le problème qui fait le titre de ce paragraphe, il suffit donc de chercher le point de rencontre de cette droite et du plan, § 70, ce qui donne le point *r*,*r'*, et de chercher la grandeur de la ligne *rh*, *r'v*, qui joint le point donné au point de rencontre, § 74; cette distance trouvée *vk*, est la distance du point au plan.

La distance d'un point *k*, *v* à un plan horizontal *a.b* *fig.* 130, est évidemment égale à *vk* distance de la projection verticale à la trace, car la perpendiculaire au plan est ici une verticale, le point de rencontre est *k*, *h* (§ 70 *fig.* 117) et la distance de ces deux points est *vk* (§ 74, *fig.* 125).

La conclusion précédente se tirerait pour un plan quelconque perpendiculaire à l'un des plans de projection. La distance d'un point à ce plan serait toujours mesurée par la distance de la projection de ce point sur le même plan de projection à la trace de ce plan.

Ainsi la distance du point *h'*, *v'*, au plan *cde* serait *h'r*.

Lorsque le plan est parallèle à la ligne de terre, *fig.* 131, soit *h*, *v*, le point donné, nous mènerons un plan perpendiculaire à la ligne de terre par ce point. L'intersection de ces deux plans, rabattue, est gg', et le point rabattu est k. Abaissant kd perpendiculaire à gg', le problème est résolu, et kd est la distance du point h, v au plan. On peut relever le point d, ce qui donne r, r', pour ses projections.

Si le point donné était le point o, oq serait la distance cherchée.

§ 76. *Trouver la distance d'un point à une droite.* — On ne peut pas dire d'une droite perpendiculaire à une autre droite, ce qu'on dit d'une droite perpendiculaire à un plan; les projections d'une droite perpendiculaire à un plan sont perpendiculaires aux traces du plan; mais quand deux droites sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections ne sont pas généralement rectangulaires entre elles. Nous verrons bientôt dans quel cas cette circonstance a lieu.

Pour résoudre le problème dont l'énoncé fait le titre de ce paragraphe, nous sommes conduits à cet autrè :

D'un point donné abaisser une perpendiculaire sur une droite.

En effet, la distance d'un point à une droite est mesurée par la perpendiculaire menée du point sur la droite.

Or, si du point donné, on abaisse un plan perpendiculaire sur la droite donnée, la droite qui joindra le point donné au point de rencontre de la droite et du plan, sera la perpendiculaire demandée; car, passant par le pied de la perpendiculaire au plan et dans ce plan, elle sera perpendiculaire à la droite, et de plus elle passera par le point donné. Il ne restera plus qu'à déterminer la distance du point donné au point de rencontre.

En résumé, il faut donc : 1° *Mener par le point donné un plan perpendiculaire à la droite donnée*; 2° *chercher le point de rencontre de la droite et du plan*; 3° *joindre le point au point donné*; 4° *chercher la grandeur de cette dernière droite.* Nous savons effectuer ces trois dernières constructions. Il nous reste à effectuer la première.

Soient ab, $a'b'$, *fig.* 132, les projections de la droite, h, v

celles du point. Les traces du plan mené par le point perpendiculairement à la droite doivent être respectivement perpendiculaires aux projections de cette droite, § 75; mais ces traces ne doivent pas passer par les projections du point, § 37. Seulement, comme nous connaissons la direction de ces traces, nous pouvons concevoir une droite menée par le point et dans le plan, parallèlement au plan H. Alors sa projection verticale sera vd parallèle à la ligne de terre, et sa projection horizontale sera parallèle à la trace horizontale du plan, § 41; mais comme la trace du plan doit être perpendiculaire à ab, la projection horizontale de cette horizontale sera donc hd' perpendiculaire à ab. Cette horizontale a pour trace verticale le point d qui appartient à la trace du plan. Ce plan est donc dkg. Le plan mené par le point perpendiculairement à la droite, étant déterminé, il nous reste à chercher le point de rencontre, ce qui donne le point r, r', et enfin à joindre ce point au point h, v, ce qui donne enfin la droite hr, vr' pour la perpendiculaire demandée.

La longueur de cette droite se détermine comme au § 74. On trouve gr'.

Lorsque la droite donnée est parallèle à l'un des plans de projection, nous sommes conduits par la construction à remarquer que la projection horizontale de la perpendiculaire à la droite est perpendiculaire à la projection de cette même droite, car le plan mené par le point h, v, *fig.* 133, perpendiculairement à la droite, est vertical, puisque la droite est horizontale, et sa trace passe par la projection h du point. Cette trace est de plus perpendiculaire à ab, car la droite étant perpendiculaire à ce plan, sa parallèle ab l'est aussi, et par suite à la trace. Donc enfin, gkd est le plan perpendiculaire, g, g', est le point de rencontre, et gh, $g'v$ est la perpendiculaire demandée. Mais nous avons déjà démontré, § 51, *fig.* 82, ce principe que : *Lorsque deux droites sont rectangulaires, et que l'une d'elles est parallèle à l'un des plans de projection, les projections de ces deux lignes sur ce plan sont aussi rectangulaires.*

Ce principe admis de nouveau, il est aisé de résoudre le cas précédent de la *fig.* 133, *fig.* 134. Du point h on abaisse hg perpendiculairement sur ab. On projette g en g', on joint h, v et g, g' et le problème est résolu.

La longueur véritable de la perpendiculaire se trouve comme précédemment.

La distance du point h, v, à la parallèle ab, $a'b'$, à lt, *fig.* 135, a pour projections hr, gr', et sa véritable grandeur est vk. La distance du point o à la même droite est od.

La distance du point h, v *fig.* 136, à la verticale o, $o'o''$, est ho.

§ 77. *Trouver la distance de deux plans parallèles, de deux droites parallèles, d'une droite et d'un plan parallèles.* — 1° On prendra un point dans le 1er plan, § 42, et l'on cherchera la distance de ce point au second plan, § 75; 2° on prendra un point sur l'une des droites, et l'on cherchera sa distance à la seconde droite; 3° on prendra un point sur la droite et l'on cherchera la distance de ce point au plan, figures 137, 138, 139.

§ 78. *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.* — On démontre en géométrie que cette plus courte distance est la perpendiculaire commune à ces deux droites, et voici le procédé général pour déterminer sa position et sa grandeur.

Soient ab et cd les deux droites données, *fig.* 140. Par un point f de la droite ab, on mène fg parallèle à l'autre droite cd. On fait passer un plan mn par ces deux droites; ce plan est parallèle à cd. On projette la droite cd sur ce plan. Pour cela, d'un point quelconque h de cette droite, on abaisse hi perpendiculaire au plan; par le point de rencontre i on mène une parallèle ik à cd, c'est la projection de cd sur le plan mn, car cd est parallèle à ce plan. Au point k où ik rencontre ab, on élève kl perpendiculaire au plan mn, et cette ligne est la plus courte distance cherchée.

En effet, cette ligne kl est perpendiculaire à mn, et par suite à ab. Enfin elle est perpendiculaire à ki, et par suite à sa parallèle *cd*. Elle est donc perpendiculaire aux deux droites, elle est donc leur plus courte distance.

C'est la ligne la plus courte qu'on puisse mener de *a b* à *cd*, car toute autre ligne comme *s b* serait oblique par rapport à *st* et serait plus longue que *st*. or $st = kl$.

Il ne reste plus qu'à effectuer par les procédés de la géométrie descriptive, toutes les constructions que nous venons d'indiquer. Nous mettrons à la *fig.* 141 les lettres des lignes qui se correspondent dans la *fig.* 140.

Soient *a b*, *a'b'*, *c d*, *c'd'* les deux droites. Par la première droite *a b*, *a' b'* nous menons un plan parallèle à la seconde *cd*, *c' d'*, § 65. *f*, *f'* est le point pris sur *a b*, *a' b'*; *fg*, *f' g'* est la parallèle à *c d*, *c' d'*, *b o g'* est le plan parallèle. Nous projetons *c d*, *c' d'* sur ce plan. Pour cela, d'un point *h*, *h'* nous menons *h i*, *h' i'* perpendiculaire au plan, nous déterminons le point de rencontre *i*, *i'*, et par ce point nous menons *i k*, *i' k'* parallèle à *c d*, *c' d'*; cette parallèle se trouve par là même située dans le plan *b o g'*, et par conséquent rencontre *a b*, *a' b'* en *k*, *k'*.

Par ce point nous élevons *k l*, *k' l'* perpendiculaire au plan *b og'*, et cette perpendiculaire rencontre *cd*, *c' d'* en *l*, *l'*. Les droites *k l*, *k' l'* sont les projections de la plus courte distance, et *kq* en est la grandeur.

On remarquera, *fig.* 140, que si l'on a seulement pour but de déterminer la grandeur de la plus courte distance, la ligne *h i* la donne, sans donner sa véritable position. Il suffirait donc, *fig.* 141, de trouver la longueur de la ligne *h i*, *h' i'*.

Soit proposé de trouver la plus courte distance entre une ligne quelconque *a b*, *a' b'*, *fig.* 142, et la ligne de terre *c d*. Le plan parallèle à *c d* mené par *a b*, *a' b'*, est *a g*, *b' g'*, (§ 65, *fig.* 109). La perpendiculaire *h i*, *h' i'* à ce plan le rencontre suivant *i*, *i'* (§ 75, *fig.* 131 et § 47 *fig.* 65). La parallèle à *cd* est *i k*, *i' k'*, et la plus courte distance est *k l*, *k' l*. Sa grandeur est *l o* ou *h f*.

La plus courte distance des deux droites dont l'une est verticale, *fig.* 143, est égale à la distance de la projection horizontale de la verticale à la projection de l'autre droite. En effet, le plan vertical abg est celui mené par ab, $a'b'$ parallèlement à c, $c'd'$. La droite c, $c'd'$ se projette sur ce plan suivant k, $k'i'$, et la plus courte distance est la perpendiculaire au plan abg, kc, $k'c'$. Sa grandeur est kc (§ 74, *fig.* 124).

§ 79. *Trouver l'angle de deux droites dont les projections sont données.* — Ce problème sera résolu à l'aide de l'un des problèmes du § 50 et du problème du § 46. En effet, pour trouver l'angle de deux droites, il suffit de faire passer un plan par ces deux droites, et de le rabattre sur l'un des plans de projection ou sur un plan parallèle; l'angle des deux droites se projettera alors en véritable grandeur sur ce plan de projection.

Soient ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, *fig.* 144, les droites données. Le plan qui passe par ces deux droites a pour trace horizontale ac. Pour rabattre ce plan avec les deux droites qu'il contient, nous rabattrons le point o, o' où elles se coupent, par le procédé ordinaire; puis, joignant ce rabattement k aux points a et c, les lignes ak et kc seront les rabattements des deux droites données et l'angle akc sera l'angle cherché.

Les deux droites ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, *fig.* 145, étant, l'une quelconque et l'autre parallèle à la ligne de terre, le plan de ces deux droites a pour trace ag. Le point o, o' se rabat en k, et les deux droites en ak et kd''. Donc akd'' est l'angle demandé.

Les deux droites étant, l'une parallèle au plan H, l'autre parallèle au plan V, *fig.* 146, ag est la trace du plan, k le rabattement du point o, o', ak et kd'' les rabattements des droites, et akd'' est l'angle demandé.

Les deux droites ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, *fig.* 147, sont rectangulaires.

§ 80. *Trouver l'angle des traces d'un plan.* — Il est visible d'abord que l'angle des traces d'un plan n'est pas égal à l'angle qu'elles forment entr'elles dans le rabattement des plans de projection l'un sur l'autre, puisque cet angle est un angle plan du trièdre formé par les deux traces et la ligne de terre, et qu'il ne saurait être égal à la somme des deux autres angles plans.

Pour trouver cet angle il suffit évidemment de rabattre le plan sur le plan H, par exemple, et de trouver dans ce rabattement la position de la trace verticale. La trace horizontale étant restée fixe, l'angle de cette ligne et du rabattement de la trace verticale sera l'angle cherché.

Soient ab, ac, *fig.* 148, les traces du plan, b' sera le rabattement du point b, ab' celui de la trace ab, et l'angle $b'ac$ sera l'angle des deux traces.

§ 81. *Partager l'angle de deux droites en deux parties égales.* — Pour résoudre ce problème, il suffit de chercher l'angle des deux droites par le procédé du § 79, de partager le rabattement de cet angle en deux parties égales par une droite. Le rabattement de cette droite étant ainsi connu, on en déterminera les projections par la méthode du § 47.

Soient ab, $a'b'$ et cd, $c'd'$, *fig.* 149, les projections des deux droites, $ao''c$ sera leur angle. $o''k$ divisant $ao''c$ en deux parties égales, sera le rabattement de la ligne cherchée. Ses projections sont évidemment ok, $o'k'$, puisqu'elle perce le plan H en k sur la trace ac du plan des deux droites.

§ 82. *Trouver l'angle d'une droite et d'un plan.* — Si d'un point de la droite on abaisse une perpendiculaire sur le plan, l'angle des deux droites sera le complément de l'angle demandé.

Soient ab, $a'b'$, *fig.* 150, la droite donnée, et ckd le plan donné; of, $o'f'$, sera la perpendiculaire au plan. gmn sera l'angle des deux droites. Menant mp perpendiculaire à gm, l'angle pmn sera l'angle demandé.

L'angle d'une droite avec l'un des plans de projection, est l'angle qu'elle fait avec sa projection sur ce plan. Pour avoir cet angle, il suffit de rabattre le plan projetant de la droite.

Soit ab, $a'b'$, *fig.* 151, la droite donnée. Cette droite devient $a\,k$ dans le rabattement du plan projetant. Donc $k\,a\,b$ est l'angle de cette droite avec le plan H.

§ 83. *Trouver l'angle de deux plans dont les traces sont données.* — Nous déterminerons l'intersection de ces deux plans ; nous mènerons un plan perpendiculaire à cette ligne et ses intersections avec les deux plans donnés feront entre elles l'angle cherché ; nous rabattrons le plan de cet angle sur l'un des plans de projection, et le rabattement des deux intersections donnera l'angle cherché.

Soient $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, *fig.* 152, les deux plans donnés, $i\,k$, $i'\,k'$ sont les projections de leur intersection. Un plan perpendiculaire à cette intersection aura pour trace horizontale fg, perpendiculaire à $i\,k$, § 75, et coupera les deux plans donnés suivant deux droites qui forment les deux côtés de l'angle cherché, et qui percent le plan H, l'un en f et l'autre en g. Ces deux côtés vont concourir en un point de l'intersection qui se projette nécessairement sur $i\,k$. Si donc nous rabattons le plan fg sur le plan H, le sommet de l'angle se rabattra sur la perpendiculaire $i\,k$ à la charnière, puisque cette ligne contient la projection horizontale du sommet. Dans ce nouveau rabattement, nous ne connaissons que le pied o de la distance du sommet à la trace fg, sans connaître aucun des trois côtés du triangle qui sert ordinairement au rabattement d'un point. Mais, si nous remarquons que la distance du sommet à la trace fg est située dans le plan fg qui est perpendiculaire à l'intersection des deux plans, et que par suite elle est perpendiculaire à cette intersection, il suffira pour trouver cette distance de rabattre le plan $i\,k\,k'$ projetant de l'intersection sur le plan H, et d'abaisser du point o resté fixe la perpendiculaire $o\,p$ sur le rabattement $i\,k''$ de l'intersection. Cette distance $o\,p$ est la distance cherchée du sommet à la trace fg, et elle doit être portée de o en q pour avoir la position du sommet dans le rabattement du plan fg. Donc $f\,q\,g$ est l'angle demandé.

Il est clair que la projection du sommet est en r pied de la perpendiculaire $p\,r$ à $i\,k$. Sa projection verticale est en r'.

L'angle de deux plans parallèles à la ligne de terre, *fig.* 153, se déterminerait en coupant ces deux plans par un troisième plan perpendiculaire à la ligne de terre, et en rabattant les intersections. Ces deux droites forment entre elles l'angle cherché.

L'angle de deux plans verticaux, *fig.* 154, est mesuré par l'angle de leurs traces horizontales.

Si l'un des plans était horizontal, on chercherait l'angle que fait l'autre plan avec le plan H, par le procédé du paragraphe suivant.

§ 84. *Trouver l'angle d'un plan avec les plans de projection.* — Ce problème a déjà été résolu dans le rabattement d'un point, mais nous le résoudrons ici directement.

Soient $a\,b$, $a\,c$, *fig.* 155, les traces du plan, menons un plan $b\,d\,c$ perpendiculaire à l'arête $a\,b$ du dièdre formé par le plan donné et le plan H. Ce plan sera perpendiculaire au plan donné et au plan H, et déterminera, par ses intersections avec ces deux plans, l'angle rectiligne que nous cherchons. Ces deux intersections sont, l'une $b\,d$, et l'autre la ligne qui joint le point b au point c. Rabattant le plan $b\,d\,c$ sur le plan H, les deux intersections deviennent $b\,d$ et $b\,c'$, dont l'angle $c'\,b\,d$ est l'angle cherché. Il est encore égal à $c\,b'\,d$.

L'angle du plan vertical $a\,b\,c$, *fig.* 156, avec le plan V est égal à $a\,b\,d$.

Les angles du plan $a\,b$, $a'\,b'$, *fig.* 157, avec les deux plans V et H sont $e\,f\,d$ et $e\,d\,f$.

§ 85. *Partager l'angle de deux plans en deux parties égales.* — Résoudre cette question, c'est chercher les traces du plan qui divise l'angle des deux plans donnés en deux parties égales. Nous cherchons d'abord cet angle par le procédé du § 83; puis, nous mènerons la bissectrice de cet angle, et par cette droite et l'intersection des deux plans nous ferons passer un plan qui sera le plan demandé.

Soient $b\,a\,c$, $b'\,a'\,c'$, fig. 158, les plans donnés, $d\,e$, $d'\,e'$ les projections de leur intersection. On trouvera $f\,o\,g$ pour l'angle de ces deux plans. La bissectrice $o\,h$ de cet angle a pour projection $i\,h$, $i'\,h'$, et le plan $d'\,k\,e$ qui passe par ces deux droites est le plan demandé.

§ 86. *Mener une droite qui fasse avec les plans de projection deux angles donnés h et v; même question pour un plan.* — Soit a fig. 159, un point pris sur la ligne de terre, et passant par la droite cherchée; si l'on fait tourner cette ligne cherchée autour de la verticale $a\,m$ située dans le plan vertical, elle se rabattra sur le plan V en $a\,b$, faisant avec $l\,t$ l'angle h. Dans ce mouvement un point quelconque b de cette ligne aura décrit un arc de cercle dans l'espace, dont la projection horizontale est $h\,h'$ et la projection verticale $b\,v$. De même, si l'on fait tourner la même droite autour de $a\,n$ située dans le plan H, elle se rabattra en $a\,b'$ telle que $b'\,a\,t = v$, et le même point b de la droite, devenu b' tel que $a\,b' = a\,b$, dans ce rabattement, aura aussi décrit un arc de cercle dont $v\,v'$ est la projection verticale, et $b'\,h$ la projection horizontale. Le point de la droite devant se trouver à la fois sur ces deux arcs de cercle, se trouvera à leur rencontre en h, v, et la droite cherchée sera $a\,h$, $a\,v$.

Si l'on suppose maintenant que les angles h et v sont les compléments de ceux que le plan doit faire avec les plans H et V, il suffira, pour trouver ce plan, de mener le plan $x\,y\,z$ perpendiculairement à la droite $a\,h$, $a\,v$.

Lorsque la somme des deux angles h et v vaut un droit, les deux arcs de cercle sont tangents, la droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre, et le plan est parallèle à cette ligne de terre.

Lorsque la somme des angles surpasse 90°, les arcs ne se coupent pas, et le problème est impossible.

§ 87. *Les trois angles plans d'un angle trièdre étant donnés, trouver les trois angles dièdres.* — Soit $s\,a\,b\,c$, *fig.* 160, le trièdre donné. Rabattons les faces $s\,a\,b$ et $s\,a\,c$ sur la troisième $s\,b\,c$. L'arête d'intersection prendra les deux positions $s\,a$, $s\,a'$. Prenons $s\,a = s\,a'$. Si du point a on mène la perpendiculaire $a\,b\,o$ sur $s\,b$, $o\,b$ et $b\,a$ seront les traces d'un plan mené perpendiculairement à l'arête sb sur les deux faces asb, bsc, ab étant le rabattement d'une de ces traces. De même $a'c$ et co, perpendiculaires à sc au point c, seront les traces d'un plan mené par le même point a' perpendiculairement à l'arête sc. Les deux lignes ab, bo forment donc entre elles l'angle rectiligne du dièdre b comme les deux lignes $a'c$, co forment entre elles l'angle rectiligne du dièdre c. Les plans de ces deux angles se coupent suivant une droite qui perce en o la face csb, et qui passe par le point dont a et a' sont les rabattements. Cette droite d'intersection se rabat en $o\alpha'$ quand on rabat le plan de l'angle c sur le plan csb, et la longueur $o\alpha'$ est déterminée par l'arc de cercle $a'\alpha'$ décrit de c comme centre avec ca' pour rayon. L'angle $oc\alpha'$ est donc l'angle rectiligne du dièdre c. De même $ob\alpha$ est l'angle rectiligne du dièdre b.

Pour trouver le dièdre a, nous mènerons par le point a un plan perpendiculaire à l'arête sa qui coupe les faces asb, $a'sc$ suivant ah, $a'h'$ perpendiculaires, l'une à sa, l'autre à sa'. La droite hh' est la trace du plan perpendiculaire à l'arête sa sur la face csb. Cette trace et les deux intersections ah et $a'h'$ forment un triangle dont l'angle opposé à hh' est l'angle rectiligne du dièdre a. Ce triangle est construit en $hh'\alpha$, et α est l'angle cherché.

§ 88. *Réduire un angle à l'horizon.* — Le problème précédent conduit à la solution de celui-ci :

Lorsqu'on veut projeter deux points $s\,s'$ sur la carte d'un pays, *fig.* 161, on observe en o les angles sov, $s'ov$ que font les rayons visuels dirigés sur ces points avec la verticale ov du lieu. On observe également l'angle sos' sous lequel on voit les deux objets, et ces trois angles plans forment un trièdre $ovss'$. On se propose alors de trouver la projection de l'angle sos' sur la carte, ce qui place les trois points o, s, s' sur cette carte, en o, t, t', quand on connaît d'ailleurs les distances os et os'. Mais la projection tot' de l'angle sos' n'est autre chose que l'angle du dièdre v, car ot et ot' placées dans le plan H sont perpendiculaires à l'arête ov et mesurent le dièdre v. En appliquant à cet exemple la construction du paragraphe précédent, *fig*. 162, on tracera avec la verticale ov les deux angles vos, vos' des rayons visuels avec la verticale; on fera avec os l'angle observé sok; puis, prenant os' égal ok, nous mènerons $s'g$ perpendiculaire à ov, et gk perpendiculaire à os. Le triangle rectangle vgx construit avec vs' pour hypoténuse et vg pour côté, donne xvg pour l'angle du dièdre v, et par conséquent pour la projection de sok.

§ 89. *Notions succinctes sur les cadrans solaires.* — Le tracé des cadrans solaires offre de nombreuses applications de quelques-uns des problèmes résolus dans cette première partie.

Pour comprendre ce tracé, il est nécessaire de donner la définition de quelques termes que nous emploierons fréquemment dans ce qui va suivre, et de donner une idée de la manière d'agir des cadrans solaires pour indiquer les différentes heures du jour.

La terre exécute en 24 heures une révolution complète autour de son axe; de telle sorte qu'elle présente ses divers points successivement à l'action du soleil et les dérobe aussi successivement à cette action. Mais les apparences nous représentent au contraire le soleil en mouvement, et il paraît faire le tour de la terre en 24 heures. Or, il est clair que les apparences doivent être telles, que ce soit la terre qui se meuve, ou bien que ce soit le soleil. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans les raisonnements qui prouvent d'une manière incontestable le mouvement de la terre; nous nous contenterons d'admettre que la terre tourne autour du soleil; mais pour la facilité des raisonnements, nous ferons au contraire tourner le soleil autour de la terre.

Cela posé, soit pp' l'axe de la terre et m un lieu de sa surface, *fig*. 163. On nomme *méridien* de ce lieu le grand cercle qui passe par ce lieu et l'axe pp'. On appelle *horizon* le grand cercle ho perpendiculaire à la verticale mc du lieu, et l'on nomme *équateur*, le grand cercle eq perpendiculaire à l'axe du monde.

La latitude d'un lieu est la distance me de ce lieu à l'équateur, mesurée sur un méridien; la *fig.* 163, fait voir que cette latitude est égale à la *hauteur du pôle* au-dessus de l'horizon. En effet, $mc = po$ comme compléments du même arc mp.

Donc, l'axe du monde fait avec le plan horizontal d'un lieu un angle égal à la latitude de ce lieu.

Le soleil décrit chaque jour un cercle parallèle à l'équateur, et l'on a appelé *midi* l'instant où il passe dans le méridien du lieu. Il suit de là que si une droite quelconque est située dans le plan méridien, l'ombre qu'elle portera à midi sur un plan quelconque sera située sur une même droite pour tous les jours de l'année.

On appelle *méridienne* sur un plan quelconque, la droite dont nous venons de parler. On voit que cette droite n'est que l'intersection du plan méridien avec le plan dont il est question. Nous donnerons bientôt le moyen de la déterminer.

Le soleil paraissant décrire chaque jour un cercle parallèle à l'équateur, supposons que nous ayons trouvé le moyen de déterminer dans l'espace, la position d'une parallèle pp' à l'axe du monde, *fig.* 164, et de la fixer solidement sur un plan sr perpendiculaire à cet axe. Ce dernier plan sera nécessairement parallèle à l'équateur. Le soleil tournera donc uniformément autour de la droite pp', et si l'on suppose que mm' est la méridienne dans le plan sr, et que du pied c de l'axe pp' dans le plan, on décrive un cercle, en divisant ce cercle en 24 parties égales, l'ombre de pp' se portera successivement sur les lignes de divisions aux différentes heures de la journée.

Il suit de là qu'un plan parallèle à l'équateur et un axe perpendiculaire à ce plan constituent un appareil propre à indiquer l'heure du jour. Il suffit pour cela de tracer un cercle dans le plan, du pied de l'axe comme centre, de tracer la méridienne du plan passant par ce centre, et enfin de diviser le cercle en 24 parties égales à partir de cette méridienne. L'ombre de pp' en se portant sur les lignes de division indiquera l'heure.

On appelle *plans horaires* les plans qui passent par l'axe du monde pp' et les lignes de divisions du cercle dont il vient d'être question. L'axe pp', parallèle à l'axe du monde, et dont l'ombre indique toujours l'heure, se nomme *style*. On aura fait un *cadran solaire* sur un plan quelconque qz, en cherchant l'intersection de tous les plans horaires avec ce plan. Ces intersections passent par le point p trace de l'axe pp' sur le plan qz, et par les points où les lignes de division coupent l'intersection des deux plans. Cette intersection eq porte le nom de *ligne équinoxiale*, et les intersections des plans horaires et du plan du cadran sont les *lignes horaires*. En effet, le soleil, aux différentes heures du jour, porte l'ombre du style dans chaque plan horaire; donc cette ombre se porte sur la trace de ce plan sur le plan du cadran donné.

On voit que le plan du cercle c n'est qu'un cadran solaire parallèle à l'équateur. C'est le plus facile à construire quand on peut aisément fixer le plan de ce cadran perpendiculairement à l'axe du monde.

§ 90. *Résumé des opérations géométriques à exécuter pour construire un cadran solaire.* — En résumant ce qui vient d'être dit, on voit que pour construire un cadran solaire sur un plan quelconque qz, il faudra 1° trouver une parallèle pp' à l'axe du monde; 2° mener un plan perpendiculaire à cet axe en un point quelconque, et déterminer la direction mm' de la méridienne dans ce plan; 3° du pied c de l'axe du monde dans ce plan qui est celui de l'équateur, décrire un cercle, et le partager en 24 parties égales, à partir de la méridienne; 4° faire passer des plans par l'axe et les lignes horaires ainsi obtenues sur l'équateur. Pour cela on prolongera l'axe du monde jusqu'au plan du cadran, ce qui donnera un point commun à toutes les lignes horaires cherchées; et l'on prolongera de même les lignes de division du cercle jusqu'à la rencontre du plan du cadran, ce qui donnera aussi un point de chacune de ces lignes horaires. Ces dernières seront donc entièrement déterminées. Les traces des lignes horaires de l'équateur sont toutes situées sur l'intersection des deux plans, le plan de l'équateur et celui du cadran, intersection qui est la ligne équinoxiale.

Le cadran est donc formé du style cp qui est parallèle à l'axe du monde et du plan du cadran qz sur lequel sont tracées les lignes horaires issues du point p, et passant par les points XII, XI, X....... I, II, III....

La ligne eq porte le nom de ligne équinoxiale, parce que, quand le soleil décrit l'équateur, ce qui lui arrive deux fois par année, l'ombre de l'extrémité c du style décrit cette ligne; en effet, la ligne qui joint le soleil et le point c est alors toujours située dans le plan de l'équateur.

§ 91. *Tracer la méridienne sur un plan horizontal.* — On sait que la méridienne sur un plan est l'intersection de ce plan par le méridien.

Pour tracer la méridienne sur un plan horizontal, on plante un style vertical ab dans ce plan, *fig.* 165, et du pied b de ce style comme centre, on décrit des cercles concentriques. Avant midi, l'ombre de ce style se porte successivement sur ces circonférences aux points o, p, q.....; puis, l'ombre atteint bientôt sa limite inférieure à l'heure de midi, pour croître de nouveau, et dans ce nouvel accroissement, elle se porte une seconde fois sur chacune des circonférences déjà décrites. En divisant les arcs oo', pp', qq'... etc., en deux parties égales, la méridienne doit passer par tous ces points de division.

Cette méthode est appelée la méthode des *hauteurs correspondantes*; elle n'est rigoureuse qu'à l'époque des *solstices*, mais il existe des tables qui donnent les corrections à apporter aux observations, pour que la méridienne partage, exactement en deux parties égales, l'intervalle des points d'ombre notés sur les circonférences. Ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans de plus grands détails à ce sujet. Nous supposerons qu'on sait actuellement déterminer une méridienne horizontale, et nous nous occuperons du tracé des cadrans, ce qui nous fournira les applications à la géométrie descriptive que nous nous sommes proposées.

§ 92. *Construire un cadran sur un plan horizontal.* — Soit $m m'$, *fig.* 166, la direction de la méridienne tracée sur ce plan. En un point a de cette ligne plantons une tige perpendiculaire au plan du cadran, et d'une longueur quelconque. Si l'on rabat le plan méridien sur le plan horizontal, cette tige se rabattra en $a b$ d'une longueur égale à elle-même, et perpendiculairement à mm'. Si l'on fait en b avec ab un angle égal au complément de la latitude du lieu, la ligne $b s$ sera l'axe du monde rabattu sur le plan H, ou le style du cadran. Il nous reste maintenant à exécuter les opérations indiquées dans le paragraphe précédent : 1° Trouver une parallèle à l'axe du monde. Le problème vient d'être résolu et nous avons obtenu bs; 2° mener sur un plan perpendiculaire à cet axe. Menons $b k$ perpendiculaire à sb; cette ligne sera l'intersection du plan de l'équateur et du méridien, ou la méridienne dans l'équateur. Elle perce le plan H en k sur la trace de l'équateur, trace qui doit être perpendiculaire à la projection $s k$ de l'axe du monde, puisque ce plan est perpendiculaire à cet axe; donc eq est la ligne équinoxiale; 3° rabattons l'équateur et le pied b de l'axe du monde dans ce plan, sur le plan H, en b' tel que $k b' = k b$. Du centre b' avec un rayon quelconque $b' k'$, décrivons le cercle $b' k'$, et divisons la circonférence en 24 parties égales; 4° en prolongeant les lignes horaires de l'équateur jusqu'à la trace de ce plan ou la ligne équinoxiale, nous aurons un point da la trace de chacun des plans horaires sur le plan H. Le point s est la trace du style, et appartient aussi à toutes ces traces. Donc enfin les lignes horaires joindront le point s et les points XII, XI, X, IX...., I, II, III, IV, etc. Pour achever le cadran, il suffira donc de planter le style dans le plan vertical mm', faisant avec cette ligne l'angle $b s a$ égal à la latitude du lieu. Une plaque de tôle ayant la forme $s b a$

remplirait le même but; enfin la ligne verticale ab seule pourrait suffire : ce serait alors l'ombre de son extrémité b qui indiquerait l'heure.

Pour avoir les demi-heures, il faudrait diviser le cercle en 48 parties égales, et achever les constructions de la même manière.

§ 93. *Construire un cadran solaire sur un plan vertical.* — Nous supposerons tracée, dans le voisinage du mur, une méridienne horizontale.

1° Nous planterons encore une tige en un point a, *fig.* 167, de ce mur, et perpendiculairement à son plan. Puis, nous observerons à midi, donné par le cadran horizontal, l'ombre de l'extrémité de cette tige sur le mur, en o. La ligne verticale mm' passant par ce point sera la méridienne du cadran. En effet, à midi le soleil est dans le méridien. La ligne passant par le soleil et l'extrémité de la tige, et qui perce le mur en o est donc située dans ce méridien. Donc o est la trace de cette ligne dans ce plan, et ce point appartient à la trace du méridien sur le mur, c'est-à-dire à la méridienne. Or le méridien est vertical, ainsi que le mur; donc leur intersection ou la méridienne est la verticale mm'. Cela posé, du point a menons ac perpendiculaire et ab parallèle à mm'. Prenons ab égal à la longueur de la tige, et joignons bc. Le triangle cab sera le triangle horizontal passant par la tige, rabattu sur le mur, autour de ca comme charnière, et cb sera l'intersection du plan méridien et du plan de ce triangle.

Pour trouver l'axe du monde, il suffit maintenant de mener par le point b situé dans l'espace une ligne dans le méridien, qui fasse avec l'horizontale bc un angle égal à la latitude du lieu. Pour cela, nous rabattrons le méridien sur le mur, en le faisant tourner autour de mm'; bc, horizontale, prendra la direction $b'c$ perpendiculaire à mm', et l'on fera $b'c = bc$. Menant $b's$, faisant avec $b'c$ un angle égal à la latitude, le point s sera le pied de la parallèle à l'axe du monde dans le mur, et cet axe passera de plus par le point *b* relevé dans sa véritable position.

2° Pour construire l'équateur, nous mènerons *b' k* perpendiculaire à *b' s*; *b' k*, passant par le pied de l'axe du monde et étant perpendiculaire à cet axe, sera située dans l'équateur. Donc *k* est un point de la trace de l'équateur sur le mur, ou un point de la ligne équinoxiale. Mais l'équateur est perpendiculaire au style; donc la trace sur le mur est perpendiculaire à la projection *sa* de ce style sur le même mur. Donc enfin *k* VIII perpendiculaire à *sa*, est la ligne équinoxiale.

3° Rabattons maintenant l'équateur sur le mur, le point *b* ou *b'*, se rabat en *b''* tel que *k b''*= *k b'*, et cette ligne *k b''* n'est que la méridienne de l'équateur, rabattue sur le mur, dans le rabattement de l'équateur que nous venons d'opérer. Décrivons le cercle *b''*, avec un rayon quelconque, et partageons ce cercle en vingt-quatre parties égales à partir de *k b''*. Les lignes horaires de l'équateur étant ainsi obtenues, nous les prolongerons jusqu'à la ligne équinoxiale, pour avoir des points des traces des plans horaires. Les lignes horaires du cadran vertical joindront le point *s* aux points XII, I, II, III.... XI, X.... Pour achever le cadran, il suffira de planter le style en *s*, en l'appuyant sur l'extrémité *b* de la tige. On pourrait encore implanter perpendiculairement au mur, sur *sa*, un triangle rectangle en tôle dont les côtés soient *a b* et *sa*.

Enfin, l'extrémité *b* seule pourrait indiquer l'heure.

Les demi-heures seront obtenues comme au paragraphe précédent.

DES POLYÈDRES.

---

§ 94. *Intersection d'un prisme par une droite, d'une pyramide par une droite.* — Soient *abcdef*, *a' b' c' d' e' f'*, les projections du prisme, *gh*, *g' h'*, celles de la droite, *fig.* 168.

Si nous menons par la droite donnée un plan parallèle aux arêtes du prisme, ce plan rencontrera le prisme suivant des droites qui contiendront les points d'intersection de la droite et du prisme. Il suffira donc de chercher les intersections de ce plan *ik* avec le prisme, et les intersections de ces dernières avec la droite donnée. Or, le plan *ik* rencontrera le prisme, si sa trace horizontale *ik* rencontre la base *abc*. Ici, le plan *ik* coupe le prisme suivant deux droites qui percent le plan horizontal en *m* et *n*, et se projettent suivant *mp*, *m' p'*, *nq*, *n' q'*. Ces intersections coupent *gh*, *g' h'*, aux points cherchés *x*, *x'*, *y*, *y'*.

Pour trouver les points de rencontre d'une pyramide et d'une droite, nous mènerons un plan par la droite et le sommet. Ce plan rencontrera la pyramide suivant des droites, et les points d'intersection de ces droites et de la droite donnée, seront les points cherchés. Si la trace horizontale du plan mené par la droite et le sommet, ne rencontre pas le polygone, base de la pyramide, la droite donnée ne rencontre pas la pyramide.

Dans la *fig.* 169, la droite *gh*, *g' h'*, ne rencontre pas le prisme *abcdef*, *a' b' c' d' e' f'*.

Dans la *fig.* 170, le plan *ik* mené par la droite *gh*, *g' h'*, rencontre la pyramide *sabc*, *s' a' b' c'* suivant les deux droites *ms*, *m' s'*, *ns*, *n' s'*, et ces droites coupent *gh*, *g' h'*, suivant les points cherchés *x*, *x'*, *y*, *y'*.

Dans la *fig.* 171, la droite *gh*, *g' h'*, ne rencontre pas la pyramide *sabcd*, *s' a' b' c' d'*.

§ 95. *Intersection d'un prisme par un plan, d'une pyramide par un plan.* — Soient *abcdefgh, a'b'c'd'e'f'g'h'*, les projections du prisme; *ikl* le plan donné, *fig.* 172.

On trouvera les projections de l'intersection du prisme et du plan, en cherchant les intersections de toutes les arêtes avec le plan, et en joignant tous ces points deux à deux, ou bien en cherchant les intersections des faces et du plan coupant; toutes ces intersections devront se couper deux à deux sur une arête. On peut réunir les deux procédés pour les faire concourir à leur vérification réciproque.

Il peut arriver comme dans le cas de la *fig.* 172, que le plan coupant rencontre l'une des bases, ou toutes deux. Dans ce cas la section a un côté ou deux de plus que la base du prisme.

La section est ici *mnopqr, m'n'o'p'q'r'*. Sa véritable forme rabattue sur le plan H est *mtuvxn*.

La section droite du même prisme *fig.* 173, est *abcd, a'b'c'd'*, et rabattue est *a''b''c''d''*.

La section du même prisme par un plan parallèle au plan vertical *vk* est *abcdef, a'b'c'd'e'f'*, *fig.* 174.

Les coupes se dessinent hachées quand les pièces coupées sont pleines comme *fig.* 175.

Pour représenter les coupes, on suppose enlevée une partie du corps coupé. Ainsi, en enlevant successivement les parties du prisme de la *fig.* 172, à droite et à gauche du plan coupant *ikl*, on obtient les deux *fig.* 175, 176.

La projection oblique du tronc de la *fig.* 175 est *dmnopqrfgh*, *fig.* 175 *bis*, obtenue par le procédé des § 58 et 59.

Si le prisme est creux, sa coupe par un plan quelconque s'obtiendra de la même manière. Seulement, au lieu d'agir sur un seul prisme, on aura à opérer sur deux. La section droite du prisme creux de la *fig.* 177 est *abcdefghkl, a'b'c'd'e'f'g'h'k'l'*, et le prisme, ainsi tronqué, a pour projection oblique la *fig.* 177 *bis*.

Soient *sabcde, s'a'b'c'd'e'*, *fig.* 178, les projections d'une pyramide, *ikl* un plan coupant cette pyramide. Pour trouver la section faite par ce plan dans la pyramide, nous déterminerons, ou les points de rencontre des arêtes avec le plan, ou les intersections de ce plan avec les faces. On obtient ainsi la section *fghmn, f'g'h'm'n'*. La vraie grandeur rabattue est *f''g''h''m''n''*.

La projection oblique du tronc est *abcdefgh, fig.* 178 *bis.*

§ 96. *Développement des intersections précédentes. Son usage pour exécuter les corps en relief. Prisme, pyramide.*— Lorsqu'on veut exécuter en relief des corps de figure géométrique déterminée, donnés par leurs projections, il est nécessaire de faire un tracé qui donne immédiatement la grandeur des éléments linéaires qui composent ces corps. On y parvient souvent à l'aide d'une opération qui s'appelle *développement*. Elle consiste à dérouler l'enveloppe ou la surface du corps comme si elle était composée d'une matière flexible, et à l'appliquer ainsi sur un plan, sans opérer bien entendu, aucune altération dans toutes les dimensions linéaires des figures qui composent cette enveloppe.

Donnons un exemple de ce genre d'opération, pour nous faire mieux comprendre.

Soit proposé d'exécuter en relief et en bois, le prisme de la *fig.* 173. La section droite de ce prisme est, en grandeur véritable, *a''b''c''d''*. Cette section étant construite, la question revient à construire un prisme droit comme *abcd a'b'c'd', fig.* 179, dont la base soit égale à la section droite, ce que tout ouvrier est capable de faire, et dont la longueur *aa'* soit assez grande pour que l'on puisse trouver le prisme cherché, en coupant le prisme droit par deux plans parallèles comme *amno, c'm'n'o'*, et enlevant les parties *abcdmno, a'b'c'd'm'n'o'*. Pour effectuer ces opérations *fig.* 179 *bis*, le prisme étant projeté, nous ferons les sections droites *abcd, a'b'c'd'*, par les sommets *a* et *c'* des deux bases, les plus éloignés de la perpendiculaire commune aux arêtes. Ces sections détermineront le prisme droit qui doit envelopper le prisme oblique. La longueur de l'arête étant trouvée, à l'aide des projections, ainsi que la *fig.* de la section droite en véritable grandeur, on prendra une pièce de bois, qu'on dressera sur une de ses extrémités, et sur laquelle on tracera la base du prisme droit. Puis, à l'aide de l'équerre, on dressera les faces du prisme, à angle droit avec la base. Il ne restera plus qu'à couper ce prisme par deux plans parallèles passant par les points a et c', et convenablement dirigés. Pour cela, on coupera le prisme droit suivant une des arêtes cc', et on le développera en faisant tourner les faces successivement autour de leur arête commune, jusqu'à ce qu'elles soient toutes dans le même plan. Dans ce mouvement, la base se développera suivant une ligne droite, car tous ses côtés $a\,b,\ b\,c,\ c\,d$... *fig.* 179 sont perpendiculaires à l'arête, et dans le développement ils resteront perpendiculaires à cette arête, en occupant la position $c'd\,a\,b\,c$ *fig.* 179 *ter* sur une ligne droite. Le développement total du prisme droit sera la *fig.* $c\,c\,c'\,c'$. Pour avoir dans ce développement, les points des bases du prisme à construire, on cherchera *fig.* 179 *bis*, la grandeur des portions d'arêtes $m\,d,\ n'\,d''$.... puis $nc,\ n'\,c''$.... en les portant *fig.* 179 *ter*, successivement en $d\,m,\ c\,n$.... les points $m,\ n$.... seront les points des bases développées du prisme cherché. Si l'on mène les parallèles $c'o'$ à $n\,o$, $o'\,n'$ à $o\,a$.... la *fig.* $n\,o\,a\,m\,n\,c'\,m'\,n'\,o'\,e'$, sera le développement de la surface convexe du prisme cherché. En enroulant cette *fig.* sur le prisme droit, on pourra y tracer les côtés $n\,o,\ a\,o$.... $c'\,o',\ o'\,n'$.... des deux bases, et par suite exécuter deux traits de scie suivant les lignes ainsi tracées sur les faces.

Soit encore proposé d'exécuter en relief le tronc de pyramide de la *fig.* 178. Ici nous développerons la pyramide sur l'une de ses faces, $s\,a\,b$ par exemple, *fig.* 180. Pour construire cette face dont le côté $a\,b$ est déjà connu, il suffit de déterminer la longueur des arêtes $s\,a,\ s'\,a'$, et $s\,b,\ s'\,b'$. On peut alors construire le triangle $s\,a\,b$, *fig.* 180 *bis*. Les faces $s\,a\,e,\ s\,b\,c,\ s\,c\,d,\ s\,e\,d$, se construisent de la même manière. Tel est donc le développement de la pyramide, de sorte que si on l'enroulait sur la pyramide en relief, en la supposant déterminée, les sommets coïncidant, les divers sommets de la base coïncideraient également.

Pour trouver maintenant le développement de la section, et exécuter le relief, nous déterminerons également les distances du sommet de la pyramide aux différents sommets de la section, et nous porterons ces distances *fig.* 180 *bis*, sur les arêtes correspondantes. Nous aurons ainsi *mhgnfm* pour le développement de la section. Nous dresserons alors une face plane dans un morceau de bois brut, puis nous y tracerons la base *abcde*. Nous dresserons ensuite le plan de la face *sab*, faisant avec la base un angle que nous déterminerons à l'aide de la *fig.* 180, et que nous transposerons sur le relief au moyen de l'équerre à charnière, nous tracerons la face *sab* avec les éléments de la *fig.* 180 *bis*. L'arête *sb* et le côté *bc* déterminent l'arête *sc*, que l'on trace; cette dernière et *cd* déterminent *sd*, et ainsi de suite. La hauteur de la pyramide doit être égale à *s'k*, *fig.* 180.

§ 97. *Intersection de deux prismes, pénétration et arrachement.* — Soient *abcd*, *a'b'c'd'*, et *fgh*, *f'g'h'*, les projections des deux prismes, *fig.* 181.

Par un point quelconque *x*, *x'*, menons une parallèle à chacune des directions des arêtes. Le plan *yz* mené par ces deux droites sera parallèle aux arêtes des deux prismes, et tout plan qui lui sera parallèle coupera les deux prismes suivant des parallèles aux arêtes. Cela posé, pour déterminer la ligne d'intersection des surfaces des deux prismes, nous mènerons des plans parallèles au plan *yz*, nous déterminerons les intersections de ces plans avec les prismes, ce qui donnera des droites qui se couperont suivant des points de la ligne d'intersection. Tous ces points formeront un polygone plan ou non, dont nous pourrons obtenir les sommets en menant les plans auxiliaires parallèles à *yz*, non pas quelconques, mais passant par les arêtes de l'un des prismes et de l'autre. Nous obtiendrons ainsi les sommets de la ligne d'entrée et ceux de la ligne de sortie de l'un des prismes par rapport à l'autre. Ces points seront faciles à distinguer les uns des autres, car deux points de la ligne d'entrée et de sortie seront toujours situés sur la même arête de l'un ou de l'autre prisme.

Dans les constructions à effectuer, il se présentera souvent deux cas : ou la même face de l'un des prismes n'en rencontrera qu'une de l'autre prisme, ou elle en rencontrera deux. Dans le premier cas, la section sera une ligne droite, dans le second, une ligne brisée formée de deux lignes.

Toutes les circonstances dont nous venons de parler se présentent dans le cas qui nous occupe. Les plans auxiliaires menés par les arêtes *f, g, h,* du prisme *fgh*, coupent le prisme *abcd* suivant des lignes qui, par leurs intersections avec les arêtes *f,g,h,* déterminent les points 4, 5, 2, de la ligne d'entrée, et les points correspondants 8, 7, 6, de la ligne de sortie. De même l'arête *c* entre dans le prisme *fgh* par le point 1 de la face *fg,* et en sort par le point 3 de la face *fh.* Ici la ligne 5 2 est l'intersection des deux faces *dc, gh;* la ligne 2 3 4 est l'intersection de la face totale *fh,* ou son entrée dans le prisme *abcd,* par les deux faces *bc, cd;* et enfin 4 1 5 est l'intersection de la face *fg* par les deux mêmes faces *bc, cd.* La ligne de sortie 6 7 8 est entièrement située dans la face *ab.*

Pour reconnaître les points qui doivent se joindre deux à deux, il suffit de suivre les génératrices consécutives, et de noter les points au fur et à mesure qu'on les découvre, avec la suite des nombres consécutifs.

Pour construire ces deux corps en bois par exemple et les assembler, il faut développer les deux prismes en *dabcd*, *fig.* 181 *bis,* et *gfhg.* Ces développements se feront, soit en construisant la section droite, comme nous l'avons déjà ait § 96, et cherchant les distances des points 1, 2, 3, 4.... à ces sections, soit en construisant directement les bases *dabcd, fig.* 181 *bis*, et *gfhg,* connaissant sur la *fig.* 181 les côtés *ab, bc.... fg, fh....* des faces, ainsi que les arêtes et les diagonales des faces, tous éléments que la *fig.* 181 fait déterminer.

Pour construire en relief l'assemblage des deux prismes, il suffit, après les avoir construits par la méthode du § 96, de les enrouler avec les développements de la *fig.* 181 *bis*, de tracer sur les faces les *fig.* 1 2 3 4.... *fig.* 181 *bis*, et d'évider le prisme *a b c d* suivant les contours indiqués et dans la direction des arêtes du prisme *f g h*.

Dans l'exemple qui précède, l'un des prismes est entièrement traversé par l'autre : il y a, comme on le dit, *pénétration*, et il existe une *ligne d'entrée* et une *ligne de sortie*. Il peut se faire qu'une partie seule de l'un des prismes rencontre l'autre : dans ce cas, il y aura *arrachement*, et les deux lignes d'entrée et de sortie se réduiront à une seule ligne continue. C'est le cas de la *fig.* 182. Il est aisé de voir à l'inspection seule de cette *fig.* que les traces *a g*, *q r*, des plans menés parallèlement aux arêtes des deux prismes, menés par les sommets extrêmes *a* et *q* des bases, sont les limites des traces qui doivent donner des points de la ligne d'intersection. Il suit de là que la partie *h c r* du prisme *a b c d*, et la partie *g o i* ne sont pas rencontrées, et que par conséquent l'un des prismes ne traverse pas l'autre entièrement. Tous les points de la ligne d'intersection se déterminent comme précédemment, et elle a pour projections 1 2 3 4 5 6 7 8....., 1' 2' 3' 4'....

Il est facile de voir à l'inspection des deux *fig.* 181 et 182, que pour s'assurer s'il y a arrachement ou pénétration, il suffit de mener les traces des plans limites *o y*, *q z*, *a g*, *c z*, *fig.* 182, qui renferment les bases, et si les deux traces limites de chacun des prismes ne rencontrent pas toutes deux l'autre base, il y aura arrachement. Si, au contraire, les traces limites de l'un des deux prismes rencontrent l'autre base, *fig.* 181, il y aura pénétration de ce dernier prisme par le premier.

La *fig.* 182 *bis* offre également les développements de ces deux corps.

La projection oblique de la *fig.* 181 est en 181 *ter*; celle de la *fig.* 182 est en 182 *ter*.

Pour construire ces deux projections obliques, on détermine les projections obliques des deux corps, et celle de la trace du plan mené parallèlement aux arêtes des deux prismes, on mène des parallèles à cette trace par les sommets respectifs des bases; ces parallèles coupent les bases en des points par lesquels, menant des parallèles aux arêtes, on détermine des points des projections obliques de la ligne d'intersection.

§ 98. *Intersection d'un prisme et d'une pyramide.* — Soient *abcd*, *a'b'c'd'*, *fig.* 183, les projections du prisme, *efgh* et *e' f' g' h'* les projections de la base de la pyramide, *s* et *s'* celles de son sommet.

Tout plan mené par le sommet parallèlement aux arêtes du prisme, coupera les deux corps suivant des droites qui, par leurs intersections, donneront des points de la ligne cherchée. Si donc par le sommet de la pyramide nous menons une parallèle *sk*, *s'k'*, aux arêtes du prisme, tout plan passant par cette parallèle satisfera aux conditions précédentes, de conduire à la détermination de points de la ligne d'intersection. Cette droite perce le plan H en *k*, *k'*. Les traces limites des plans qui donneront des points de la ligne d'intersection seront *ke*, *kf*. Nous mènerons des traces par tous les points de la base *efgh*, et par tous ceux de la base *abcd* qui sont susceptibles de servir. Ici il ne s'en présente que deux, les points *b* et *d*. Le reste n'est plus que du dessin, et tous les points étant déterminés, il suffit de les joindre dans l'ordre convenable, comme nous l'avons dit au paragraphe précédent, en joignant tous les points situés sur des arêtes consécutives, et l'on obtient ainsi la ligne 1 2 3.... 1' 2' 3'....

Les développements de cette figure sont en 183 *bis*, et à l'aide de ces développements, on pourrait construire cette pénétration en relief.

La projection oblique de cette pénétration se trouverait comme celle du paragraphe précédent, en déterminant les projections obliques des deux corps, celle de la trace de la droite menée par le sommet de la pyramide parallèlement aux arêtes du prisme, et menant par ce point et les sommets des bases des droites, ces droites coupent les bases en des points qui déterminent des arêtes, et ces arêtes conduisent, par leurs intersections, aux points de la ligne cherchée, *fig.* 183 *ter.*

DES SURFACES COURBES.

NOTIONS GÉNÉRALES.

§ 99. *De la génération des surfaces; surfaces du second degré.* — Nous avons déjà eu l'occasion § 27, d'indiquer la manière de représenter les surfaces courbes en général. Nous étudierons maintenant les propriétés de quelques-unes d'entre elles, et nous choisirons celles qui offrent le plus d'applications dans les arts.

Les sections coniques, ellipse, hyperbole, parabole, sont aussi appelées *courbes du* 2e *degré*, parce que leur forme est traduite en algèbre par des équations du second degré.

Par une raison analogue, on appelle *surfaces du second degré* celles qui ne sont coupées par des plans que suivant l'une ou plusieurs des courbes précédentes. Il existe cinq de ces surfaces, qui sont engendrées de la manière suivante :

Si l'on conçoit deux ellipses ayant un axe commun, ou deux hyberboles ayant même axe transverse, ou deux hyberboles ayant même axe non transverse, ou deux paraboles ayant même axe, lesplans de ces deux courbes étant d'ailleurs rectangulaires, une troisième ellipse dont les sommets soient assujettis à toucher ces deux courbes, et perpendiculaire à leur plan, engendrera *l'ellipsoïde*, *fig.* 184, ou *l'hyberboloïde à deux nappes, fig.* 185, ou *l'hyperboloïde à une nappe, fig.* 186, ou le *paraboloïde elliptique*, *fig.* 187. Enfin si comme dans le dernier cas, les deux paraboles ont encore leurs plans rectangulaires, mais si les axes sont sur le prolongement l'un de l'autre, *fig.* 188, et si l'une des paraboles est la génératrice, elle engendrera le *paraboloïde hyperbolique.*

Toutes les sections planes faites dans ces cinq corps sont coniques.

Les quatre premiers, lorsque l'ellipse génératrice devient un cercle, ou que les directrices sont égales, ce qui est la même chose, se transforment en *ellipsoïde de révolution*, *hyberboloïde de révolution à deux nappes*, *hyperboloïde de révolution à une nappe*, *et paraboloïde de révolution*, parce que, en effet, dans ce cas ils peuvent être engendrés par une ellipse, ou une hyberbole, ou une parabole tournant autour de leur axe.

§ 100. *Surfaces de révolution*, *définitions.* — Une *surface de révolution* est une surface engendrée par une ligne plane *acb* tournant autour d'un axe *ab* situé dans son plan, *fig.* 189. La ligne *acb* porte le nom de *génératrice* de la surface, et la droite *ab* est *l'axe de révolution.*

La ligne *acb* étant égale à elle-même dans toutes les positions qu'elle occupe autour de l'axe, tous les plans passant par l'axe coupent la surface suivant des lignes égales à la génératrice. Ces sections portent le nom de *sections méridiennes.*

Chaque point de la ligne *acb* décrivant une circonférence de cercle autour de l'axe, toute section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle. Ces sections portent le nom de *sections parallèles.*

Les trois corps ronds étudiés en géométrie élémentaire sont des corps de révolution. Le cylindre droit à base circulaire peut être supposé engendré par une droite *cd*, *fig.* 190, assujettie à tourner autour de l'axe *ab* en restant à la même distance de cet axe. Le cône droit à base circulaire peut être supposé engendré par une droite *a c* assujettie à faire un angle constant avec l'axe *a b*, *fig.* 191. Enfin la sphère est engendrée par un demi-cercle tournant autour de son diamètre.

§ 101. *Surfaces réglées, surfaces développables, définitions; surfaces cylindriques, coniques; développements de ces surfaces.* — On nomme *surfaces réglées*, celles qui sont engendrées par le mouvement d'une ligne droite. Elles sont de deux sortes : les *surfaces développables* et les *surfaces gauches*.

Une surface développable est celle qui peut se dérouler sur un plan sans déchirure ni duplicature.

Le caractère particulier d'une surface développable est d'avoir toujours deux éléments consécutifs quelconques situés dans le même plan. (Géom. page 198, 6ᵉ édition).

Les intersections successives des éléments de la surface forment une courbe que l'on appelle *arête de rebroussement* de la surface développable.

Une surface cylindrique, *fig.* 192, est celle qui est engendrée par une droite *a b* assujettie à suivre les contours d'une courbe donnée *b c d*, en restant toujours parallèle à elle-même. Cette droite est la *génératrice* de la surface, la courbe en est la *directrice*. Cette dernière peut être plane ou à *double courbure* (2).

On appelle *section droite* d'une surface cylindrique celle qui est faite par un plan perpendiculaire aux génératrices. Toutes les sections droites sont égales, car elles sont parallèles, et toutes les sections faites dans un prisme par des plans parallèles, sont des polygones égaux.

L'arête de rebroussement d'une surface cylindrique est un point situé à l'infini.

Le cylindre droit à base circulaire est un cas particulier d'une surface cylindrique.

Une *surface conique* est celle qui est engendrée par le mouvement d'une droite *a b*, *fig.* 193, assujettie à passer par un point *s*, et à suivre les contours d'une courbe donnée *bcd*. Cette droite est la génératrice de la surface, le point *s* en est le *sommet*, et la courbe la *directrice*. Cette dernière ligne peut être plane ou à double courbure.

On appelle *sections sphériques* d'une surface conique, celles qui sont faites par des sphères de rayons variables dont le centre est au sommet.

L'arête de rebroussement d'une surface conique est le sommet.

Le cône droit à base circulaire est un cas particulier d'une surface conique.

Les surfaces cylindriques et coniques sont développables. En effet, deux de leurs éléments consécutifs sont dans un même plan. Il suit de là que si l'on fait tourner le plan des deux éléments *a' b', a" b"*, *fig.* 192, autour de *a' b'* comme charnière jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan des deux éléments *a b, a' b'*, la portion de surface *a b a' b'* aura alors été déroulée sur un plan, et comme on peut faire subir le même mouvement aux autres éléments, la surface entière pourra donc être développée sur ce plan, et dans ce développement, la courbe *bcd* aura acquis une forme particulière *BCD*, *fig.* 192 *bis*, telle que si ce développement étant tracé sur une feuille flexible, on l'enroulait autour de la surface cylindrique, deux points de la ligne BCD coïncidant avec *bcd*, la courbe entière coïnciderait.

On voit dès à présent que ces développements sont analogues à ceux déjà exécutés § 96 et suivants. Nous verrons bientôt l'usage que nous pourrons faire de ces développements.

Il est facile de voir que les sections droites d'une surface cylindrique doivent se développer suivant des lignes droites, car tous leurs éléments sont perpendiculaires à la génératrice, et dans le développement ils ne cessent pas de leur être perpendiculaires, et par conséquent se déroulent suivant une seule et même ligne perpendiculaire à cette génératrice.

Les développements des sections sphériques d'une surface conique sont des circonférences de cercle, car ces sections ont respectivement tous leurs points situés à égale distance du sommet, et dans le développement, ces points viennent respectivement se placer sur autant de circonférences de cercle.

§ 102. *Surfaces réglées; surfaces gauches, définitions, plans gauches.* — Une *surface gauche* est encore une surface réglée, c'est-à-dire engendrée par le mouvement d'une ligne droite, mais telle que deux génératrices consécutives de cette surface ne sont pas situées dans le même plan.

Il résulte immédiatement de cette définition qu'une surface gauche n'est pas susceptible d'être appliquée sur un plan sans déchirure ni duplicature.

Toute surface gauche peut être engendrée par le mouvement d'une droite assujettie à glisser sur trois lignes fixes. (Géom., page 199, 6e édition).

L'une des lignes fixes, ou directrices, peut être remplacée par un plan auquel la génératrice devra être parallèle, en s'appuyant sur les deux autres lignes.

Lorsque les trois directrices sont droites, la génératrice décrit une surface que nous avons définie déjà par une autre génération, § 99; c'est l'hyperboloïde à une nappe.

Lorsque la génératrice est assujettie à se mouvoir sur deux droites fixes, en restant constamment parallèle à un plan, la surface prend le nom de *plan gauche*, elle est identique avec une surface que nous avons déjà définie § 99; c'est le paraboloïde hyperbolique.

Ce dernier corps prend son nom de ce qu'il est coupé par un système de plans suivant des paraboles, et par un autre système de plans suivant des hyperboles.

§ 103. *Tangentes et plans tangents aux surfaces courbes, définitions.* — Une tangente à une surface courbe est une droite qui joint deux points de cette surface, infiniment voisins. En un point d'une surface il y a donc une infinité de tangentes.

Il résulte de là que toute tangente à une courbe tracée sur une surface est tangente à cette surface, et que toute tangente à une surface en un point, est tangente à une courbe plane quelconque dont le plan passe par ce point.

Un plan tangent à une surface en un point est celui qui passe par deux tangentes menées à la surface par ce point.

On appelle *normale*, la perpendiculaire menée à un plan tangent par son point de contact, et plan normal tout plan qui passe par cette ligne.

Le plan tangent en un point d'une surface est le lieu de toutes les tangentes que l'on peut mener à la surface par ce point (Géom., page 203, 6e édition).

D'où il suit que *pour mener un plan tangent à une surface courbe en un point, il suffit de faire deux sections dans la surface par ce point, de mener les tangentes à ces deux sections par le point donné, et de faire passer un plan par ces deux droites.*

De même, *lorsqu'une courbe résultera de l'intersection de deux surfaces, pour trouver la tangente à la courbe en un point, il faudra mener le plan tangent à chacune de ces surfaces par le point donné, et chercher l'intersection de ces deux plans*; ce sera la tangente demandée, car cette dernière doit être contenue dans chacun des plans tangents aux deux surfaces.

Quand l'une des deux surfaces sera un plan sécant, la tangente à la courbe sera l'intersection du plan tangent et du plan sécant.

§ 104. *Intersection de surfaces courbes par des droites, par des plans, par d'autres surfaces courbes; méthodes générales.* — Pour trouver les points où une droite rencontre une surface courbe, nous employerons un procédé analogue à ceux du § 94; nous mènerons par cette droite un plan qui coupera la surface suivant une ligne, et les points de rencontre de cette ligne avec la droite donnée, seront les points cherchés. Nous choisirons la section dont les projections sont les plus faciles à construire.

Pour trouver les points de l'intersection d'une surface par un plan, nous mènerons un système de plans qui couperont la surface donnée suivant des lignes, et le plan donné suivant des droites. Ces droites et ces lignes respectivement situées dans le même plan se rencontreront, et leurs points communs seront nécessairement situés à la fois sur le plan donné et sur la surface; donc ils seront des points de la ligne d'intersection de la surface courbe par le plan. On choisit le système de plans dont les sections dans la surface courbe sont les plus simples.

Pour trouver des points de l'intersection de deux surfaces courbes, nous mènerons un système de plans qui couperont les surfaces suivant des courbes. Ces courbes se rencontreront deux à deux, et leurs points communs, étant à la fois situés sur les deux surfaces, seront des points de leur commune intersection. On choisit également les plans qui donnent les sections les plus faciles à construire.

DES SURFACES CYLINDRIQUES.

---

§ 105. *De la représentation des surfaces cylindriques. Tout plan tangent contient une génératrice.* — D'après sa définition, § 101, une surface cylindrique sera déterminée, lorsqu'on connaîtra les projections de la directrice et celle de la droite à laquelle la génératrice doit être parallèle, § 27.

Soient donc $abcd$, $a'b'c'd'$ les projections de la directrice, *fig.* 194, et fg, $f'g'$, celles de la direction de la génératrice d'une surface cylindrique. Comme il suffit, pour déterminer une génératrice, de prendre un point k, k', sur la directrice, et de mener par ce point une parallèle à la droite fg, $f'g'$, il s'ensuit qu'il sera aisé de trouver autant de génératrices qu'on voudra de cette surface, et par suite de trouver la trace de la surface sur le plan H, ou le plan V;

car il suffira pour cela de chercher les traces des génératrices et de joindre tous les points par une courbe. Comme cette opération peut toujours se faire, quand la surface est donnée par sa directrice et la direction de sa génératrice, nous prendrons souvent pour directrice la trace même de la surface sur l'un des plans H ou V.

Soit *abcd* la trace horizontale d'une surface cylindrique, *fig.* 195. Lorsque cette courbe est fermée, il est facile de trouver les limites des projections horizontales des génératrices et de leurs projections verticales. Nous démontrerons pour cela le principe suivant :

Tout plan tangent à une surface cylindrique en un point, contient la génératrice qui passe par ce point. En effet, cela résulte, § 103, de ce qu'un plan tangent est déterminé par deux tangentes menées à deux sections de la surface par ce point. Or, la génératrice peut être l'une de ces sections et sa tangente est la génératrice elle-même ; donc cette génératrice est toute entière contenue dans le plan tangent.

Il suit encore de là que la génératrice située dans le plan tangent, perçant le plan H et le plan V sur les traces de la surface, ces deux points sont alors des points de contact, et l'on peut leur appliquer la propriété d'un point de contact d'une surface, c'est que toute tangente à une courbe tracée sur la surface par ce point, doit être située dans le plan tangent en ce point. Donc alors, la tangente à la trace de la surface au point où la génératrice de contact perce le plan H ou le plan V, est contenue dans le plan tangent en ce point. Mais ces tangentes ne peuvent être que les traces du plan tangent ; donc,

Les traces d'un plan tangent à une surface cylindrique sont tangentes aux traces de cette surface, aux points où la génératrice de contact perce les plans H *et* V.

Maintenant, pour limiter la surface, *fig.* 195, menons deux plans tangents perpendiculaires au plan H ; ces plans devant contenir une génératrice, et étant verticaux, auront chacun leur trace horizontale parallèle à la projection *ge* de la direction des génératrices, et comme de plus, la trace de tout plan tangent est tangente à la trace de la surface, pour trouver ces traces, il suffira donc de mener à la courbe *a b c d* des tangentes parallèles à *g e;* il est clair que toutes les génératrices se projetteront entre ces deux traces, horizontalement.

De même, pour limiter la surface sur le plan V, nous mènerons deux plans tangents perpendiculaires au plan V, leurs traces horizontales seront les perpendiculaires *a a'*, *b b'* à la ligne de terre, tangentes à *a b c d*, et leurs traces verticales seront parallèles à la projection *g' e'* de la génératrice.

Les génératrices de contact des premiers plans tangents sont *c q, c' q'* et *d k, d' k'*, les génératrices de contact des seconds sont *a f, a' f'* et *b p, b' p'*.

§ 106. *Un point d'une surface cylindrique étant donné par l'une de ses projections, trouver l'autre.* — Soit *h* la projection horizontale du point *fig.* 195. D'abord, un point de la surface ne saurait être donné par ses deux projections, car deux projections d'un point suffisent pour le déterminer, et l'assujétir à se trouver sur une surface, serait une condition de trop. Une seule projection étant donnée, la perpendiculaire au plan de projection menée par ce point, rencontrera la surface en un ou plusieurs points qui satisferont à la condition donnée.

Cela posé, si, par le point *h*, nous faisons passer un plan vertical parallèle aux génératrices, ce plan aura pour trace horizontale la ligne *h m* parallèle à *g e*, et il coupera la surface suivant deux génératrices, qui auront pour projection horizontale commune *h m*, l'une ayant pour trace le point *m* et l'autre le point *n*. Ces deux génératrices se projetteront verticalement, l'une en *m' v'*, l'autre en *n' v*. Or, la verticale, élevée par le point *h*, est comprise dans ce plan, et rencontre par conséquent la surface sur les deux génératrices *m h, m' v'* et *n h, n' v*. Donc enfin, *v* et *v'* sont les projections verticales de deux points de la surface dont h est la projection horizontale.

v'' étant la projection verticale d'un point de la surface. On trouverait également que cette projection correspond à deux points de la surface dont h' et h'' sont les projections horizontales. Pour trouver ces dernières, nous mènerions par v'' un plan perpendiculaire au plan V, et parallèle aux génératrices. Ce plan couperait la surface suivant deux génératrices, dont la projection verticale serait $v''\, t''$, et les projections horizontales $t'\,h'$ et $t\,h''$. Ces projections fixent la position des points h' et h'' par leur rencontre avec la perpendiculaire $v''\,h'\,h''$ à la ligne de terre.

La même question peut être appliquée à un cylindre droit, à base circulaire ou non. Un pareil cylindre, dont l'axe serait vertical, aurait pour limite horizontale le cercle ou la courbe $abcd$, *fig.* 196, et pour limites verticales les deux droites $a'\,a''$, $c'\,c''$. Un point v en projection verticale correspond à deux projections horizontales h', h''; mais un point donné ici par sa projection horizontale h ne serait pas déterminé, car tous les points de l'arête h'', $v'\,v''$ répondent à la question.

Si la même question était posée pour un cylindre droit à base circulaire, dont l'axe fût la ligne de terre, *fig.* 197, les limites de ce cylindre seraient ses propres traces sur les plans V et H, c'est-à-dire les deux génératrices $c\,d$ et $a\,b$ placées à une distance de $l\,t$ égale au rayon du cylindre. Un point étant donné par sa projection horizontale h, pour déterminer l'autre, nous ferons par le point une section perpendiculaire à l'axe. Cette section sera un cercle dont le centre est placé sur l'axe en o. Rabattant ce cercle sur le plan H, en le faisant tourner autour de son diamètre horizontal, son centre restera fixe, et le point donné se rabattra sur $h\,k$ perpendiculaire à la charnière (§ 46, *fig.* 60). Les points k et k' sont les deux points cherchés rabattus; en relevant le cercle, ces deux points se trouvent projetés verticalement en v et v', tels que $v\,o = v'\,o = h\,k = h\,k'$. Les deux génératrices qui passent par ces points sont *ef, e'f'* et *ef, e'' f''*.

Si les deux projections d'un point sont données, on conçoit facilement la condition pour qu'il soit extérieur ou intérieur à une surface cylindrique, ou bien situé sur elle. Il faut que la parallèle aux génératrices menée par ce point ait sa trace hors de la trace de la surface, ou dans l'intérieur, ou sur la courbe.

§ 107. *Plan tangent à une surface cylindrique ; trois cas.* — Un plan tangent à une surface cylindrique sera déterminé quand on connaîtra le point de contact, car il le sera par les deux tangentes menées aux deux sections faites par le point dans la surface.

De même, un plan tangent sera déterminé quand on connaîtra un point extérieur à la surface par lequel il devra passer, car ce point et la génératrice qui devra être située dans le plan, constituent trois conditions, ce qui est nécessaire pour déterminer un plan.

Enfin, si un plan tangent est assujéti à être parallèle à une droite donnée, il sera encore déterminé, car passer par une génératrice et être parallèle à une autre droite, constituent aussi trois conditions :

D'après cela, 1° soit proposé de mener un plan tangent à une surface cylindrique par le point *h*, *fig.* 198, pris sur la surface. La projection horizontale *h* correspondant à deux points, dont les projections verticales sont *v* et *v'*, il y aura deux plans tangents, l'un qui contiendra la génératrice *ab*, *a'b'*, et l'autre la génératrice *cb, c'b''*. Ces génératrices percent le plan H, l'une en *a*, l'autre en *c*, et les tangentes à la trace de la surface menées par ces points sont les traces horizontales des deux plans tangents, § 105. Les traces horizontales *ao, cp,* étant menées, il y a plusieurs moyens de trouver des points des traces verticales. D'abord, la génératrice située dans chaque plan tangent perce le plan V sur la trace du plan, l'une en *b'*, l'autre en *b''*. De plus, le point de contact étant un point du plan, une horizontale menée dans le plan par ce point, aura sa projection horizontale parallèle à la trace horizontale du plan, et sa projection verticale sera parallèle à la ligne de terre. La trace de cette ligne pour le premier plan est en *k*, et la trace de l'autre pour le second en *k'*; ces points sont une première vérification de l'exactitude des constructions. Pour seconde vérification, on peut se proposer de trouver l'intersection des deux plans tangents ; elle doit être parallèle aux génératrices, car ces deux plans passent par deux lignes parallèles (72). Enfin, les traces des plans tangents doivent être tangentes à la trace verticale de la surface, si elle existe sur le dessin, aux points *b'*, *b''*.

2° Soit proposé de mener un plan tangent à une surface cylindrique par un point *h, v, fig.* 199, pris hors de la surface. Ce point devant être situé dans le plan cherché, et ce plan devant contenir une génératrice, une parallèle aux génératrices menée par ce point devra être contenue dans le plan. Cette parallèle est la droite *ab, a' b'*, et ses traces *a* et *b'* sont situées sur celles du plan. Or, la trace du plan tangent doit être tangente à la base du cylindre; et comme on peut mener par le point *a* deux tangentes à cette base, il y aura donc deux plans tangents qui satisferont à la question. Leurs traces horizontales sont *ak, ao,* et leurs traces verticales passent par *b'*, et sont *kb', ob'*. On peut vérifier la justesse des constructions en cherchant les traces verticales *g*, et *g'*, des génératrices de contact, qui doivent se trouver sur les traces des plans, et mener par le point donné des horizontales qui doivent aussi percer le plan vertical en *p* et *p'*, également sur les traces verticales des deux plans. Ces traces doivent aussi être tangentes à celle de la surface aux points *g* et *g'*.

3° Soit proposé de mener un plan tangent à une surface cylindrique parallèlement à une droite donnée *ab, a' b' fig.* 200. Par un point quelconque *h, v*, nous mènerons une droite parallèle à la droite donnée, qui est ici elle-même, et une droite parallèle aux génératrices. Le plan conduit par ces deux droites, devra être parallèle au plan tangent cherché, car ce plan devant contenir une génératrice, sera nécessairement parallèle aux autres, et de plus il doit être parallèle à la droite $a\,b$, $a'\,b'$. Les traces $m\,n$, $m'\,n'$ de ce plan étant déterminées, il ne reste plus qu'à mener une tangente à la base, parallèlement à $m\,n$; cette droite sera la trace horizontale du plan tangent cherché. Et comme on peut mener deux tangentes à la trace du cylindre parallèles à $m\,n$, il y aura deux plans qui répondront à la question. Les traces verticales se trouveront comme précédemment, soit en cherchant les traces des génératrices de contact, soit en menant des horizontales par des points situés sur ces génératrices.

Ce problème est toujours possible dans les trois cas.

§ 108. *Plan tangent au cylindre droit dans quelques cas particuliers.* — Lorsqu'un cylindre droit est vertical, tout plan tangent en un point h, v *fig.* 201, a sa trace horizontale tangente à la base au point h; les plans tangents menés par un point extérieur h', v', ont pour traces horizontales les deux tangentes $h'o$, $h'o'$, et sont verticaux. Les plans tangents menés parallèlement à la droite $a\,b$, $a'\,b'$, ont leurs traces parallèles à $a\,b$, et sont tangentes à la base.

Le cylindre ayant pour axe la ligne de terre *fig.* 202, le plan tangent au point h, v ou au point h, v', contiendra la tangente à la section droite menée par ce point; faisant cette section et rabattant, les points k et k', sont les points de contact rabattus. Alors les tangentes menées par ces points à la section sont les droites $k\,t$, $k'\,t$ qui percent le plan horizontal et le plan vertical, l'une en t et t', l'autre en t et t''. Ces points appartiennent aux traces des plans tangents, qui sont d'ailleurs parallèles à la ligne de terre.

Le point h, v étant extérieur *fig.* 203, et l'axe du cylindre dans le plan horizontal en $a\,b$, on fera une section droite par ce point, on rabattra le point et la section, le premier en k, on mènera les tangentes $k\,t$, $k\,s$, à la section rabattue. Ces tangentes ont pour traces t, t', s, s' qui appartiennent aux traces des plans tangents cherchés. Ces plans se coupent suivant une horizontale, dont les projections sont $g\,f$, $g'\,f'$.

Enfin, pour mener le plan tangent parallèlement à une droite donnée *a b, a' b', fig.* 204, l'axe étant la ligne de terre, nous ferons passer par cette droite un plan *c d, c' d'* parallèle à la ligne de terre. Nous ferons une section droite dans le cylindre, nous rabattrons l'intersection des deux plans et la section, et nous mènerons des tangentes à la section, parallèles à cette intersection rabattue. Ces tangentes seront comprises dans les plans tangents parallèles au plan *c d, c' d'*, et par suite, ces derniers seront parallèles à *a b, a' b'*; ces tangentes ont leurs traces, l'une en *t, t'*, l'autre en *s, s'*, qui sont des points des traces des plans tangents; ces plans sont d'ailleurs parallèles à *l t*.

On trouvera facilement le moyen à employer pour mener un plan tangent au même cylindre, faisant avec le plan H un angle donné *fig.* 205. On mènera la tangente à la section rabattue, faisant avec la verticale l'angle donné.

§ 109. *Utilité des plans tangents pour raccorder les surfaces.* — On dit que deux surfaces cylindriques *se raccordent* lorsqu'elles ont un plan tangent commun. Les deux surfaces cylindriques de la *fig.* 206, ont un plan tangent commun, suivant la génératrice commune *a b, a' b'*. On en voit un exemple dans la moulure de la *fig.* 207.

On peut encore avoir recours au plan tangent pour raccorder deux surfaces cylindriques, ayant leurs génératrices parallèles, à l'aide d'une troisième surface, pour raccorder les cylindres droits *a b c, a' b' c', fig.* 208, dont ces courbes sont les directrices. Nous mènerons un plan tangent à chaque point de raccordement *c, c'*, et une surface cylindrique d'une forme donnée tangente à ces deux plans suivant les génératrices *c d, c' d'*.

§ 110. *Intersection d'une surface cylindrique par une droite.*—Soient *a b, a' b'*, les projections de la droite donnée *fig.* 209. Par cette droite, nous ferons passer un plan parallèle aux génératrices § 104 ; ce plan rencontrera la surface suivant une ou plusieurs génératrices, et les points de rencontre de ces droites et de la droite donnée, seront les points cherchés.

c d, *c d'* sont les traces du plan *f g*, *f' g'*, *k m*, *k' m'*, les génératrices d'intersection et *h*, *v*, *h'*, *v'*, les points de rencontre de la droite *a b*, *a' b'*, et de la surface.

Si la trace du plan mené par la droite *a b*, *a' b'* était tangente à la base, cette droite serait elle-même tangente à la surface ; si elle ne rencontrait pas la base, la droite elle-même ne rencontrerait pas la surface cylindrique. La droite *p q*, *p' q'* est tangente au cylindre au point *o*, *o'*, et la droite *x y*, *x' y'*, ne rencontre pas le cylindre.

§ 111. *Intersection d'une surface cylindrique par un plan, tangente, rabattement et développement.* — Soit *k o h* le plan sécant, *fig.* 210. En se reportant encore à la méthode générale du § 104, les sections les plus simples à faire dans une surface cylindrique, sont celles faites par des plans parallèles aux génératrices. Nous mènerons donc, ici par exemple, des plans verticaux parallèles aux génératrices ; ces plans rencontreront le plan donné suivant des droites et la surface suivant des génératrices. Ces droites et ces génératrices auront pour points de rencontre, des points de la courbe d'intersection.

Un de ces plans verticaux, comme *a b*, *fig.* 210, coupe la surface suivant les droites *a b*, *a' b'*, et *c b*, *c' b''* ; il coupe le plan donné *k o h*, suivant la droite *a b*, *m' n'* : cette droite rencontre *a b*, *a' b'*, et *c b*, *c' b''* aux points *m*, *m'* et *n*, *n'*, qui sont des points de la courbe.

Une génératrice limite comme *c' b''*, de la projection verticale, sera une tangente à la courbe au point *n'*, car la tangente étant l'intersection du plan tangent et du plan sécant, § 103, le plan tangent en ce point est perpendiculaire au plan V, et la tangente se projette sur sa trace verticale ; de même *p q* est la projection horizontale de la tangente à la courbe au point *x*, *x'*.

En menant quelques tangentes en des points de la courbe, on parviendra plus aisément à en déterminer la véritable forme.

Pour mener une tangente au point quelconque m, m', nous mènerons le plan tangent $a\,k$, suivant la génératrice $a\,m$, et l'intersection $k\,m$, $k'\,m'$ de ce plan, avec le plan coupant, est la tangente demandée § 103.

Pour limiter la projection verticale par des tangentes parallèles à la ligne de terre, il faudra chercher évidemment celles qui sont horizontales. Or, ces dernières auront leurs projections horizontales parallèles à $o\,k$, et aux traces des plans tangents qui les contiennent; donc les tangentes $t\,s$, $r\,y$, à la trace de la surface, menées parallèlement à $o\,k$, sont les traces de ces plans tangents, et les intersections de ces plans avec $k\,o\,h$ donnent les tangentes demandées $d\,e$, $d'\,e'$ et $f\,g$, $f'\,g'$.

Les tangentes parallèles au plan V, dont les projections horizontales seraient parallèles à la ligne de terre, se trouveraient d'une manière analogue, si l'on déterminait la trace de la surface sur le plan V.

On peut remarquer, pour la facilité des opérations, que les plans auxiliaires sont tous parallèles entre eux, et que, conséquemment, leurs intersections par le plan coupant sont également parallèles.

La grandeur naturelle de cette courbe dans son plan, s'obtiendrait en faisant tourner le plan sécant autour d'une de ses traces, et rabattant chaque point de la courbe par la méthode connue. On obtiendrait ainsi la courbe $m''\,n''$..... une tangente $m\,k$, $m'\,k'$, devient dans ce rabattement $m''\,k$, puisque le point k reste fixe.

Lorsqu'on veut tracer la courbe sur la surface du cylindre exécuté en relief, il faut, comme il est dit au § 96 pour les polyèdres, obtenir le développement de la surface cylindrique, et le tracé, dans ce développement, de la courbe d'intersection par le plan donné. Cette opération entraîne aussi, comme au paragraphe cité, la recherche de la *section droite*, c'est-à-dire de la section faite par un plan perpendiculaire aux génératrices. Cette section étant obtenue par ses projections, pour avoir son développement, il faut en connaître la grandeur véritable ou le rabattement. Le développement se fait en partageant cette dernière courbe en éléments qu'on porte à la suite les uns des autres sur une ligne droite. Par chaque point de division, on élève une perpendiculaire à cette ligne droite, et l'on porte sur cette perpendiculaire une longueur égale à la portion de la génératrice correspondante de la surface, comprise entre la section droite et la courbe donnée.

Il existe une manière de disposer les données, sans altérer la position relative de la surface et du plan sécant, qui simplifie beaucoup les opérations. D'abord, comme les plans de projection sont au choix de l'opérateur, on peut prendre le plan vertical perpendiculaire au plan donné, et dans ce cas, la projection verticale de la courbe d'intersection sera une ligne droite sur ce plan, ce qui dispense déjà de construire deux courbes pour les projections. De plus, cette disposition donne immédiatement sur la figure les distances des points de la courbe à la charnière dans le rabattement du plan sécant, car ces distances sont celles des projections horizontales à la ligne de terre.

Enfin, si en prenant le plan vertical perpendiculaire au plan coupant, on le prend également parallèle aux génératrices, ces dernières se trouveront projetées en vraie grandeur sur ce plan, et dans la recherche du développement, on n'aura pas à déterminer la grandeur de ces génératrices.

Toutes ces dispositions sont prises sur la *fig.* 211, où le cylindre et le plan sécant ont la position relative de la *fig.* 210. Un plan ab parallèle aux génératrices et vertical, coupe la surface suivant deux génératrices ab, $a'b'$, cb, $c'b'$ et le plan donné koh, suivant une droite, dont la projection verticale est oh, et la projection horizontale ab. Ces lignes se coupent au point m', m et n', n, qui sont des points de la courbe d'intersection de la surface et du plan. Autrement, $d'df$ est un plan parallèle aux génératrices et perpendiculaire au plan V, qui coupe la surface suivant df, $d'f'$, df, $d''f''$, et le plan suivant la droite p, $p'p''$. Ces droites se coupent aux points p, p' et p, p'', qui sont des points de la courbe cherchée. On déterminera les points x, v, pour lesquels les tangentes sont parallèles à la ligne de terre, et les points y et z, pour lesquels les tangentes sont perpendiculaires à la même ligne. La tangente en un point quelconque n se trouvera en menant la génératrice cb du point n et le plan tangent ct. L'intersection tn du plan tangent et du plan sécant sera la tangente.

Un point quelconque n, n', se rabat en n'', tel que $n'n'' = ng$. La tangente se rabat en $t'n''$, car le point t devient t'. Les tangentes en y et z, se rabattent en $y'y''$ et $z'z''$, perpendiculairement à ho; les tangentes en x, x', se rabattent parallèlement à ho. Pour avoir le développement de la courbe $n''v''y''m''x''z''$, qui se trouve être ici la section droite, nous prendrons les éléments $z''n''$, $n''v''$, $v''y''$...., et nous les porterons sur la ligne droite ho, par exemple. Par les points z''', n''' v'''....; nous mènerons des perpendiculaires à ho, et nous porterons sur ces perpendiculaires les distances respectives m_1m', n_1n'..... des points de la section quelconque qr à la section droite. Les points z^{IV}, n^{IV}, v^{IV}.... ainsi déterminés, seront des points du développement de la section qr. Il est clair qu'on pourrait obtenir de la même manière, le développement de la trace $ad'c$ du cylindre en portant les distances $a'm'$, $c'n'$... sur les génératrices correspondantes, à partir de la section droite, on obtiendra ainsi la courbe A D C P.

Si la figure était faite, et qu'on ne pût pas choisir les plans de projection, on projetterait le cylindre sur un plan parallèle aux génératrices perpendicnlaire au plan H par exemple, et l'on exécuterait les constructions comme il vient d'être dit. Soit uvu' le plan sécant *fig.* 210, et Au' le nouveau plan de projection. Une génératrice ab de la surface projetée sur le plan, serait AB, telle que $c''m'' = c'm'$. La trace du plan coupant sur ce nouveau plan serait $a'u''$, telle que $i' u''=i u$. Un point quelconque M de la courbe se projettera sur ce nouveau plan en M'', tel que C'' M''=C'M'. Cette projection obtenue, il n'est pas nécessaire de la tracer; les distances de ses points à la trace $o' h'$ du plan de la section droite, seront les véritables grandeurs des portions de génératrices comprises entre la courbe donnée, dont le plan est $u v u'$, et la section droite dont le plan est $h o k$. Sur la ligne $h' o'$, on portera donc les éléments de la section droite, puis, on portera sur les perpendiculaires à $h' o'$ menées par les points de division, des grandeurs égales aux portions de génératrices comprises entre $h' o'$ et les projections sur A u' des points respectifs de la courbe; ainsi, dans ce développement, M devient M'', et N devient N'', s'il s'agissait de développer la trace de la surface, il faudrait porter les distances comme AB de la ligne A u' à la trace $o' h'$ du plan de la section droite. On obtient ainsi PQL pour la base développée, comme on a obtenu XYZ pour la section $u v u'$.

§ 112. *Intersection d'un cylindre droit par un plan oblique. Projection oblique du tronc.*—On peut encore simplifier ces opérations plus que nous ne venons de le faire, si l'on est libre de choisir les plans de projection; car, si nous prenons pour plan horizontal un plan perpendiculaire aux génératrices, toute section se projettera sur la base; si de plus nous prenons pour plan vertical un plan perpendiculaire au plan coupant, la projection verticale de la section sera une ligne droite. On sera donc totalement dispensé ici de construire les projections de la section.

Soit $a b c d$, *fig.* 212, la trace de la surface dont les génératrices sont verticales. Soit $k o h$ le plan coupant perpendiculaire au plan V. $a b c d$ et $a' c'$ sont les projections de la section, $a'' b'' c'' d''$ en est le rabattement, mais il est inutile pour le développement. La section droite est $a b c d$, dont le développement est en PQRS. Portant $a' p$ de P en A, $b' q$ de Q en B, et ainsi de suite, on obtient ABCD pour la courbe $a b c d$, $a' c'$, développée.

Pour obtenir la projection oblique du tronc, nous mettrons la base en projection oblique par la méthode ordinaire, en projetant chacun de ses points, ce qui donnera la courbe $a' b' c' d'$, *fig.* 213. Les génératrices limites verticales s'obtiendront en menant à la projection horizontale $abcd$ des tangentes parallèles à la projection horizontale de la ligne projetante qui, nous l'avons vu, § 57, est l'hypothénuse d'un triangle dont 1 et 2 sont les côtés, 1 pris sur la ligne de terre et 2 sur une perpendiculaire à cette ligne, les points de contact déterminent les génératrices cherchées. Ces génératrices obtenues, on cherchera les projections obliques de leurs extrémités, et l'on achèvera la courbe supérieure par les moyens connus.

§ 113. *Exécuter en relief une surface cylindrique et ses diverses sections.* — S'il s'agissait d'exécuter en relief la surface de la figure 210, on taillerait un prisme droit sur la base duquel on tracerait la section droite du cylindre dans sa grandeur rabattue. On exécuterait alors le cylindre droit dont cette section droite serait la base, puis on enroulerait autour du cylindre le développement de la *fig.* 210 en ayant soin de faire coïncider la ligne $o' h'$ avec la base du cylindre, et l'on tracerait sur le contour de celui-ci les figures affectées par les développements dans cet enroulement. On aurait ainsi les sections dont il a été question, tracées sur la surface cylindrique. Il ne resterait plus qu'à couper le cylindre suivant ces courbes.

§ 114. *Intersection de deux surfaces cylindriques, tangente et développement, projection oblique.* — La méthode générale donnée, § 104, nous conduit à mener des plans qui coupent les deux surfaces suivant des génératrices. Les points de rencontre de ces génératrices donnent des points de la courbe d'intersection des deux surfaces.

On mènera donc par un point donné H, V, *fig.* 214, une parallèle à la génératrice de chacune des surfaces. Le plan ab déterminé par ces deux droites est parallèle aux génératrices des deux cylindres, et, s'il les coupe tous deux, les génératrices d'intersection donneront des points de la courbe. La trace *a b* rencontrant les deux bases, le plan *a b* coupe les deux cylindres, les génératrices d'intersection se rencontrent aux points *d*, *e*, *f*, *g*, *d'*, *e'*, *f'*, *g'*, qui sont des points de la courbe cherchée.

Il est clair que la limite des plans qui donneront des points de la courbe sera obtenue en menant aux bases des tangentes parallèles à *a b*. Ici ces tangentes comprennent la petite base et rencontrent la grande, donc toutes les génératrices du petit cylindre rencontrent le grand. On dit, dans ce cas, qu'il y a *pénétration*, et il existe alors deux courbes, l'une d'*entrée* et l'autre de *sortie*; il y a *arrachement*, lorsqu'une partie seulement de l'une des surfaces rencontre l'autre, et l'on s'en aperçoit, lorsque les deux tangentes parallèles à *a b* à l'une des bases ne rencontrent pas toutes deux l'autre base. C'est le cas de la *fig.* 215, où les tangentes, à l'une et l'autre base, ne rencontrent pas l'autre toutes deux à la fois. La courbe est alors unique.

On s'assure donc s'il y a pénétration ou arrachement, en menant des tangentes aux bases parallèles à la trace du plan mené lui-même parallèlement aux génératrices des deux cylindres. Si les deux tangentes à la même base rencontrent l'autre, il y a pénétration; si les deux tangentes à l'une des bases ne rencontrent pas l'autre à la fois, il y a arrachement.

Des points importants à déterminer sont ceux auxquels donnent lieu les plans limites *a' b'*, *a'' b''*, *fig.* 214 et 215. D'abord ces plans sont tangents à la surface, à la trace de laquelle leurs propres traces sont tangentes; car, ayant leurs traces tangentes à la base, ils sont de plus parallèles aux génératrices, et par conséquent en contiennent une, celle du point de contact de leur trace et de la base. Ces plans sont donc tangents à la surface. De plus, prouvons *qu'ils coupent l'autre surface suivant des génératrices qui sont des tangentes à la courbe cherchée*. En effet, pour déterminer les tangentes aux points donnés par ces génératrices, il faudrait,

§ 103, mener le plan tangent à chacune des surfaces et trouver l'intersection de ces deux plans. Or, le plan tangent à l'une d'elles étant *a' b'* par exemple, ce plan coupe l'autre suivant *ck*, *c' k'*, et le plan tangent suivant cette dernière génératrice la contiendrait ; son intersection avec *a' b'*, serait donc cette génératrice elle-même. Donc enfin *ck*, *c' k'* est une tangente à la courbe. On en dirait autant des génératrices AB, CD, EF, A'B'....

Enfin on déterminera aussi de préférence les points donnés par les plans qui passent par les génératrices extrêmes des deux surfaces. Les tangentes en ces points auront les génératrices extrêmes de la projection horizontale pour projections horizontales, et d'autres auront les génératrices extrêmes de la projection verticale pour projections verticales; car les plans tangents à l'une des surfaces sont alors, ou perpendiculaires au plan H, ou perpendiculaires au plan V. Ainsi, *fig.* 214, *lm*, *no*, *pq*, sont tangentes à la projection horizontale de la courbe, mais *l' m'*, *n' o'*, *p' q'*, ne sont pas tangentes à la projection verticale. Au contraire *r's'*, *t' v'*, *u' x'*, *y' z'*, sont tangentes à la projection verticale, et *r s*, *t v*; *u x*, *y z* ne le sont pas à la projection horizontale.

Une tangente en un point quelconque *M*, *M'* se déterminera à l'aide des deux plans tangents aux deux surfaces menés par les génératrices qui passent par ce point, en cherchant l'intersection de ces deux plans.

Pour exécuter ces intersections en relief, il est encore nécessaire de faire le développement des surfaces, et d'y rapporter les courbes d'intersection. Ce développement étant effectué ici, on obtient la *fig.* 214 *bis* pour la *fig.* 214 et la *fig.* 215 *bis* pour la *fig.* 215.

Pour obtenir la projection oblique, on peut s'y prendre de deux manières : Chercher directement la projection oblique de la courbe, à l'aide de ses projections orthogonales, ou, les projections obliques des deux cylindres étant trouvées, *fig.* 215 *ter*, déterminer la projection oblique de la trace de l'un des plans *a b*, *a' b'*.... cette trace *A B* étant trouvée, on mènera des parallèles *A'B', A''B''*..., à cette trace, qui couperont les cylindres suivant des génératrices qui donneront des points de la courbe en projection oblique.

Pour le tracé des *fig.* 214, 215, on se rappellera la convention établie § 33. Tout point vu comme *g, g'*, sera l'intersection de deux génératrices vues. Tout point caché comme M, M' ou *d, d'* sera l'intersection de deux génératrices cachées, ou d'une vue et d'une cachée. Il est bien entendu que les génératrices vues de la projection verticale ne sont pas les mêmes que les génératrices vues de la projection horizontale. Les parties vues de la projection horizontale, *fig.* 214, sont A, *cp, lrn;* les parties vues de la projection verticale sont *rltupy*.

§ 115. *Cas auquel on peut ramener l'intersection de deux cylindres quelconques. Intersection de deux cylindres droits. Chapeau de palier, tuyaux.* — Le choix des plans de projection étant permis, on pourra simplifier l'épure, en prenant pour plan horizontal un plan perpendiculaire aux génératrices de l'une des surfaces, et pour plan vertical un plan parallèle aux génératrices de la seconde. Les constructions s'effectueront d'ailleurs comme il vient d'être dit. Les plans auxiliaires *ab*,.. seront ici parallèles au plan V, *fig.* 216.

Nous pouvons maintenant compléter ce qui restait d'imparfait dans la projection oblique du chapeau de palier de la *fig.* 101. Le cylindre horizontal *i k l, i' k' l'* est surmonté d'un cylindre vertical dont il faut chercher l'intersection avec le premier, pour mettre ensuite cette courbe en projection oblique. Les projections orthogonales de cette intersection sont les bases elles-mêmes des deux cylindres, *fig.* 216 *bis*. Pour mettre cette courbe en projection oblique, nous projetterons d'abord obliquement les arcs verticaux *i k l, i' k' l'* en IKL, I'K'L'; puis, divisant *i l* en parties égales, nous diviserons IKL en un même nombre de parties, et nous prendrons PQ $= \frac{1}{2}$ *pq*, MN $= \frac{1}{2}$ *mn*.... nous aurons ainsi la projection oblique de tous les points de la courbe d'intersection.

Le même genre d'intersection se présente toujours dans la rencontre des tuyaux de conduite, à angle droit. Pour en exécuter les modèles, on cherche l'intersection, on la développe sur chacun des cylindres, et on la trace sur chacun d'eux à l'aide de ces développements, il ne reste plus qu'à appliquer l'outil pour achevèr de les assembler.

§ 116. *De l'hélice, définition, construction, tangente.* — On appelle *hélice* une courbe tracée sur un cylindre, et engendrée par un point qui s'élève, dans le sens de la génératrice, d'une quantité proportionnelle à l'arc parcouru sur la section droite.

On verra bientôt, comme conséquence de cette définition, que les éléments d'une hélice font avec la génératrice un angle constant.

Construisons l'hélice d'après sa définition. Soit 0 1 2 3.... (*fig.* 217), le cylindre donné, que nous supposerons droit, et à base circulaire. Le point *o* étant le point décrivant, supposons qu'il s'élève de la quantité *o' o''* pendant qu'il parcourt la section droite. Comme il s'élève d'une quantité proportionnelle à l'axe parcouru sur cette section; il s'en suit que si l'on divise la base en 8 parties égales, par exemple, ainsi que la ligne *o' o''*, pour avoir la position du point décrivant, lorsqu'il se sera élevé de $\frac{1}{8}$ de *o' o''*, il suffira de prendre la génératrice 1, et de chercher sa rencontre avec l'horizontale menée à $\frac{o'o''}{8}$ de *o*, ce qui donnera le point 1'. Pour trouver le point 2', on mène la génératrice 2 et l'horizontale à $\frac{2}{8}$ de *o'o''* du point o', et ainsi de suite. Lorsque le point décrivant aura achevé la circonférence entière il sera revenu sur la même génératrice.

La ligne *o' o''* dont s'élève le point décrivant, lorsqu'il a achevé une révolution complète autour du cylindre, se nomme *Pas de l'hélice.* La portion de courbe *o' 4' o''* de l'hélice indéfinie se nomme *Spire.*

Si l'on développe le cylindre et l'hélice qui est tracée sur lui, la circonférence se déroule suivant *o' a,* et ses points de divisions en 1, 2, 3,.... les génératrices de ces points de division sont perpendiculaires à $o'a$, et pour avoir les positions des points 1, 2, 3,.... 1', 2', 3',.... de l'hélice dans le développement, il suffit de prendre sur le développement des génératrices, des quantités respectivement égales à $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$, de $o'o''$. La série des points 1'', 2'', 3'',.... ainsi déterminés, constitue le développement de l'hélice. Or, les quantités O' 1, O' 2, O' 3,.... étant proportionnelles à 1 1'', 2 2'', 3 3'',..... cette propriété appartient à une ligne droite. Donc tous les points 1'', 2'', 3'',.... sont en ligne droite; et comme le développement ne change rien à la situation des éléments de la courbe par rapport aux génératrices, on peut donc dire, que :

Tous les éléments de l'hélice font avec la génératrice un angle constant.

On peut, de ce développement, tirer un moyen, plus commode pour le tracé, de construire la courbe. Comme la question est résolue, quand on a trouvé les horizontales qui passent par les points de division de $o'o''$, on remarque d'abord que ces horizontales seront les mêmes, soit qu'on prenne $o'a$ égale à la circonférence rectifiée de la section droite, et qu'on divise $o'a$ ou $o'b$ en 8 parties égales; soit qu'on prenne une ligne quelconque $o'4$, et qu'on divise $4c$ ou $o'c$ en 8 parties égales; et, comme il sera plus facile de diviser la plus grande ligne $o'c$ en 8 parties égales que $o'4$, on déduit de là cette nouvelle construction de l'hélice : Sur la ligne $o'a$, on prendra une grandeur quelconque $o'4$, à l'extrémité de laquelle on portera $4c$ égale au pas; on joindra $o'c$, et l'on divisera cette ligne en 8 parties égales. Par les points de division, on mènera des horizontales qui couperont les génératrices de même numéro aux points 1', 2', 3',.... de l'hélice.

La tangente à une courbe étant le prolongement de l'un de ses éléments, il est aisé de voir que le développement de la tangente se confond avec la courbe développée. La tangente à l'hélice en un point 3', par exemple, est donc l'hypothénuse du triangle rectangle O' 3 3'', et comme elle est comprise dans le plan tangent mené suivant la génératrice 3, elle aura pour projection horizontale la trace de ce plan. Le point où elle perce le plan H est évidemment éloigné du point 3 de l'arc rectifié 0 1 2 3; si donc, on porte cet arc sur la trace du plan, on aura le point *t* pour trace horizontale de cette tangente. La projection *t'* de ce point sur la ligne de terre, détermine avec 3 la projection verticale de cette tangente.

Avec un peu d'attention, on doit remarquer que les points tels que *t*, traces horizontales des différentes tangentes à l'hélice, appartiennent à la développante du cercle 0, 1, 2, 3, de sorte que, si cette courbe était tracée, son intersection avec la tangente au cercle, menée en un point 7, déterminerait la trace horizontale de la tangente à l'hélice au point situé sur la génératrice 7.

On appelle *hélices parallèles*, des hélices de même pas, tracées sur le même cylindre, telles que les hélices de la *fig.* 218. Pour construire la deuxième avec la première, sans passer par la construction générale, il est clair qu'il suffit de porter la hauteur constante qui les sépare sur toutes les génératrices des points de division, à partir de la première courbe.

On appelle *hélices concentriques* les hélices de même pas qui sont tracées sur des cylindres différents ayant même axe. Telles sont les hélices de la *fig.* 219. Pour construire l'hélice du cylindre intérieur, on se sert des mêmes horizontales qui ont servi à trouver celle du cylindre extérieur, ou inversement. Ces hélices sont différemment *inclinées*, car le pas est le même et les circonférences parcourues différentes.

§ 117. *Surface gauche hélicoïde ; définition, construction.* — Les vis étant composées de surfaces qui dérivent de l'hélice, nous donnerons ce qui a rapport à ces sortes de surfaces, quoique leur description appartienne aux surfaces gauches.

On appelle *surface gauche hélicoïde* une surface engendrée par une droite assujétie à suivre les contours d'une hélice tracée sur un cylindre, et à rencontrer l'axe du cylindre sous un angle constant. Supposons l'axe du cylindre vertical, *fig.* 220, et la droite *a b, a' b'* horizontale, celle qui doit engendrer la surface. Dans son mouvement, les extrémités décriront deux hélices concentriques, et pour avoir la position d'une génératrice quelconque, *c d, c' d'*, il suffira de joindre deux points *c, c'* et *d, d'* des deux hélices, situés sur des génératrices de même rang.

Cette surface ainsi limitée peut se nommer une *bande hélicoïde*. Si la droite est verticale, *fig.* 221, la surface engendrée ou la bande hélicoïde est simplement une partie de la surface cylindrique comprise entre deux hélices parallèles.

Lorsque la droite *a b, a' b'* est quelconque, *fig.* 222, le point *b, b'* étant assujéti à suivre les contours de l'hélice tracée sur le cylindre *o' b'*, le point *a*, dans le même mouvement, en décrit une autre sur le cylindre de rayon *a' o'*; car le point *b* restant à la même distance de l'axe, le point *a* n'en change pas non plus. De plus, le point *b* s'élevant d'une quantité proportionnelle à l'arc horizontal parcouru par ce point, le point *a* s'élèvera également et en même temps de la même quantité. Donc, il décrira une hélice de même pas que la première. Cela posé, ayant tracé ces deux hélices pour avoir une génératrice quelconque de la surface hélicoïde, il suffit de joindre deux points *c, c', d, d'* de ces hélices, situés sur des génératrices qui se correspondent.

Il est à remarquer que les points 1, 2, 3..., où les génératrices coupent l'axe, sont également distants, car ce point de la droite doit s'élever, comme tous les autres, de la même quantité pour le même arc parcouru. Cette quantité doit être une fraction du pas, égale à la fraction de circonférence parcourue.

§ 118. *Vis; filet; vis à filet quadrangulaire, à filet triangulaire, à filet carré.* — Une *vis* est composée d'un cylindre sur lequel est en saillie un corps engendré par une figure plane géométrique quelconque, située dans le plan de l'axe, et qui se meut en suivant les contours d'une hélice, *fig.* 223, 226. La partie saillante porte le nom de *filet,* et le cylindre celui de *noyau* de la vis.

La vis prend le nom de la figure qui a engendré le filet. Ainsi, on dit *vis à filet quadrangulaire* celle dont le filet est engendré par un rectangle, *fig.* 223, et *vis à filet triangulaire* celle qui est engendrée par un triangle, *fig.* 226. On dit aussi *vis quadrangulaire, vis triangulaire, vis carrée.*

§ 119. *Projections d'une vis quadrangulaire, pas de la vis. Vis simple, vis double; leur usage.* — Soit *a b c d, a' b',* *fig.* 223, le carré destiné à engendrer le filet de la vis sur le noyau de rayon *b' o'*. On voit clairement que les deux côtés *a b, c d,* engendrent chacun une bande hélicoïde du genre de celle de la *fig.* 220, et les deux côtés *a c, b d,* deux bandes analogues à celle de la *fig.* 221. Le filet est compris sous ces quatre bandes.

On a coutume de représenter les vis par les projections des arêtes courbes des filets; on pourrait le faire par les projections du profil générateur, comme on le voit dans une partie du filet, où *g h* est la projection horizontale du profil, et *g' h' g' h'* la projection verticale. Les hélices *a, c'*... sont les hélices extérieures de la vis, les hélices *b, d'*...., sont les hélices intérieures. Les premières sont moins inclinées que les secondes. L'hélice moyenne est celle qui est tracée sur le cylindre de rayon moyen; elle a une pente moyenne entre les hélices extérieure et intérieure. L'*épaisseur du filet* est *c' a''* mesurée parallèlement à l'axe. La *saillie du filet* est *c' d'* et le *vide du filet* est *b d'*.

Le *pas de la vis* est le pas même des hélices construites. Lorsque le vide est la moitié du pas, la vis est dite *simple.* Dans les vis carrées, le vide est presque toujours égal à la saillie. Lorsque le pas est égal à quatre fois la saillie, la vis est dite *double* ou *à deux filets.* C'est le cas de la *fig.* 224; on a intercalé dans le pas *a a''*, qui est le même que le précédent, un second filet; dans ce pas, il y a deux vides et deux épaisseurs. Les profils de départ *cdef*, *bghi* des filets sont diamétralement opposés.

La vis est *triple* ou *à trois filets*, quand le pas est égal à six fois l'épaisseur. Dans ce cas, il y a trois filets dans le pas et trois vides, *fig*. 225.

On construit des vis à deux, trois, filets, quand le pas devant avoir une grandeur déterminée, l'épaisseur du filet serait trop grande, en faisant la vis simple, eu égard à la résistance que ce filet doit supporter.

§ 120. *Projections d'une vis triangulaire.* — Soit *abc*, *a'c'*, *fig*. 226, le triangle destiné à engendrer le filet de la vis sur le noyau de rayon *o'c'*. Ici la surface du filet se compose de deux bandes hélicoïdales du genre de celle de la *fig*. 222.

Pour représenter la vis triangulaire en projections, on peut, comme au paragraphe précédent, déterminer un grand nombre de positions du profil *abc*, comme on l'a fait dans le filet *a'' d''*. On se contente souvent de projeter les hélices intérieures *ck*, *c'' k''*..., et les hélices extérieures *ad*, *a'' d''*...; puis on joint les points *a*, *c*, *a'' c''*....

Cette manière de procéder ne donne pas précisément le contour apparent des bords de la vis, mais ce contour est sensiblement en ligne droite. Sa recherche rigoureuse nous conduirait beaucoup plus loin que ne le comportent ces éléments.

Le profil générateur est en général un triangle isocèle dont les dimensions dépendent de la nature de la matière de la vis. Dans les grosses vis en bois, le triangle *abc* est rectangle en *a*, dans les vis moyennes en bois dur, il est équilatéral.

La vis simple est celle dont le pas *aa''* est égal à la base *bc* du triangle générateur. La vis double a le pas double de *bc*, comme on le voit *fig*. 227; la vis triple a le pas triple de *bc*, comme *fig*. 228.

§ 121. *Ecrou, définition, construction. Projections obliques des vis. Moyen rapide de construire les projections* *des courbes.* — L'*écrou* d'une vis est une pièce dont la figure forme en creux celle de la vis en plein. Pour comprendre sa forme, il suffit de supposer un cylindre creux du même diamètre que le noyau de la vis ; alors si l'on fait mouvoir le profil générateur autour de ce cylindre creux, et suivant l'hélice, il tracera dans la partie pleine une empreinte qui offrira en creux la même surface que le filet forme en relief.

Un écrou doit embrasser au moins trois spires de la vis.

L'art de confectionner les vis et les écrous est du ressort de l'enseignement pratique de l'Ecole, nous ne nous y arrêterons pas.

Pour obtenir la projection oblique d'une vis, on mettra les cylindres intérieur et extérieur en projection oblique, ainsi que leurs points de division, ce qui donnera les génératrices qui servent au tracé des hélices ; puis, comme les distances verticales ne changent pas dans cette projection, on sera donc conduit aux mêmes opérations qui servent à déterminer les projections orthogonales.

Pour exécuter plus rapidement le dessin, soit d'une projection orthogonale, soit d'une projection oblique, de vis, on peut se contenter de décrire une hélice intérieure et une hélice extérieure, puis de découper des calibres qui serviront à tracer les autres : une demi-hélice peut encore servir, car il suffit de la retourner pour tracer l'autre moitié.

Les *fig.* 223 *bis* et 226 *bis* présentent les projections obliques des vis dessinées, *fig.* 223 et 226 en projection orthogonale.

§ 122. *Coupe de la vis et de son écrou par un plan.* — Pour trouver l'intersection d'une vis par un plan, il faut chercher l'intersection de toutes les génératrices par ce plan. Soit la vis de la *fig.* 226 et $d''v''$ le plan coupant horizontal, on obtient pour coupe horizontale la *fig.* 229.

La coupe horizontale de la *fig.* 223 faite suivant $g'v'$ est la *fig.* 230.

On obtiendrait de la même manière la coupe par un plan vertical passant par l'axe ; ces coupes sont obtenues *fig.* 231 et 232.

§ 123. *Des escaliers.* — La plupart des escaliers tournants sont des combinaisons de surfaces hélicoïdes avec le plan.

Dans un édifice, l'enceinte réservée à l'escalier se nomme *cage.* Elle peut avoir des formes très variées, nous parlerons principalement des cages cylindriques.

Lorsque la *tête des marches*, c'est-à-dire la partie située du côté du centre, fait partie d'un pilier appelé *noyau,* l'escalier est dit *à noyau.* La *queue* des marches est alors engagée dans le mur de la cage. La *fig.* 233 montre les projections d'un escalier en pierre qui a fait une révolution complète autour du noyau vertical : il est engendré par le rectangle *a b c d* suivant les contours de l'hélice dont le pas est *a h.* La surface supérieure du filet ainsi décrit est taillée en marches.

Un escalier est dit *à jour,* lorsque le noyau est remplacé par un filet de même pas que la vis, et dans lequel la tête des marches est engagée. Ce filet porte le nom de *limon.* La queue des marches, au lieu d'être engagée dans le mur de la cage, peut l'être dans un second limon parallèle au premier : dans ce cas, l'escalier prend le nom d'*escalier à deux limons et à jour.* Aux escaliers en bois, on met ordinairement deux limons. La *fig.* 234 représente un escalier de ce dernier genre dans une cage cylindrique.

Lorsqu'un escalier n'a que de petites dimensions, on peut l'isoler entre les deux limons, et même tailler en gradins les deux limons pour laisser voir le profil des marches, à la tête et à la queue. Le dessous, s'il n'est pas caché, présente une surface hélicoïdale exécutée en menuiserie : tel est l'escalier de la *fig.* 235. Il peut convenir à une chaire à prêcher, en remplaçant le limon intérieur par un pilier d'église.

Quand on est réduit à placer un escalier dans une cage irrégulière et mal éclairée, il faut éviter le noyau. Alors, on inscrit dans la base de la cage une courbe, une ellipse A B C D autant que possible, *fig.* 236, puis l'ellipse du jour *abcd* parallèle à la première. Enfin, on trace une troisième courbe *a' b' c' d'* entre les deux autres et qui est la *ligne de montée.* Comme on ne peut pas donner aux marches une largeur constante, on se contente de la faire constante sur la courbe *a' b' c' d'*. A l'égard des têtes des marches, on s'arrange de manière à les faire sensiblement égales.

Le tracé des projections des arêtes des marches constitue ce qu'on nomme le *balancement des marches;* c'est le tâtonnement par lequel on arrive à satisfaire à l'égalité des lignes 1-2, 2-3, 3-4. La hauteur des marches étant donnée, on en déduit l'hélice, dont la projection horizontale est *abcd.* Le balancement dépend de la hauteur des marches.

Il n'entre pas dans notre plan de donner les détails de construction des escaliers. On trouvera pourtant, *fig.* 237, les tracés propres à faire débiter une partie de limon.

DES SURFACES CONIQUES.

§ 124. *De la représentation des surfaces coniques. Tout plan tangent contient une génératrice.* — D'après sa définition § 101, une surface conique sera déterminée lorsqu'on connaîtra les projections du sommet et celles de la directrice.

Soient donc, *abcd*, *a' b' c' d'*, les projections de la directrice (*fig.* 238) et *s*, *s'*, les projections du sommet. On trouvera autant de génératrices qu'on voudra de cette surface conique, en prenant des points *k*, *k'*, sur la directrice, et joignant ces points au sommet. Les traces de la surface se trouveront comme au § 105, en cherchant les traces des génératrices sur les plans H et V. Nous prendrons souvent l'une de ces traces pour directrice d'une surface conique.

Une surface conique a toujours deux *nappes*, puisque toutes les génératrices peuvent se prolonger au-delà du sommet.

On démontrerait, comme on l'a fait au § 105 et d'une manière analogue, que *le plan tangent à une surface conique contient toujours une génératrice*; car une des sections faites dans la surface peut être la génératrice elle-même dont la tangente se confond avec elle.

De plus, il serait également facile de prouver que *les traces du plan tangent à une surface conique sont tangentes aux traces de cette surface, aux points où la génératrice de contact perce les plans H et V*. On ne ferait que répéter, pour le démontrer, ce qui a été dit à ce sujet au § 105.

Alors, pour limiter ici la surface conique représentée *fig.* 239, nous emploierons le même procédé qu'au § 105, pour limiter la surface cylindrique. Nous mènerons deux plans tangents à la surface, perpendiculaires au plan H, et deux autres au plan V. Les traces horizontales des premiers passeront par la projection horizontale du sommet et les traces verticales des seconds par la projection verticale du même point. Les traces horizontales de ces premiers seront donc les tangentes à la base *cs* et *ds* menées par le point *s*. Les traces horizontales des seconds seront les tangentes à la base *aa'* et *bb'* menées perpendiculairement à *lt*. Les génératrices de contact des premiers plans sont *cs, c's' et ds, d's'*; celles des seconds sont *as, a's',* et *bs, b's'*.

§ 125. *Un point d'une surface conique étant donné par l'une de ses projections, trouver l'autre.* — Soit *h* la projection horizontale de ce point. On mènera, comme au § 106 par le point donné et le sommet, un plan vertical; ce plan aura pour trace horizontale la ligne *hs* et il coupera la surface suivant deux génératrices qui auront *hs* pour projection horizontale, l'une ayant pour trace le point *m* et l'autre le point *n*. Ces génératrices se projettent verticalement l'une en *m's'* et l'autre en *n's'*. La verticale du point *h* étant comprise dans ce plan, rencontre ces deux génératrices aux points *h, v* et *h, v'* qui sont les points cherchés.

v'' étant la projection verticale d'un point de la surface, on trouverait également que ce point a deux projections horizontales h' et h'' que l'on détermine en menant par v'' et le sommet un plan perpendiculaire au plan V qui rencontre la surface suivant deux génératrices dont $v''t''$ serait la projection verticale et ph', $p'h''$ les projections horizontales; les rencontres de ph' et de $p'h''$ avec la perpendiculaire $v''h''$ à lt, déterminent la position des points h' et h''.

La même question peut être appliquée à un cône droit, *fig.* 240. Les constructions présenteront ici cela de particulier que, en donnant la projection horizontale h, la projection verticale v déterminée par la méthode précédente sera unique, à moins qu'on ne considère les deux nappes de la surface. Au contraire, v'' étant une projection verticale, elle correspond à deux projections horizontales h' et h''.

Si le cône droit avait son axe dans le plan H, *fig.* 241, en as, $a's'$; d'abord, pour trouver les limites de cette surface, en projection horizontale elles sont données par deux lignes sb, sc, tracées dans le plan H et faisant avec l'axe sa l'angle donné de la génératrice avec l'axe. Ce sont les traces horizontales des plans tangents verticaux. Pour trouver les limites verticales, nous remarquerons que les plans tangents perpendiculaires au plan V, doivent avoir pour trace horizontale la ligne ss', et qu'en menant une section bc perpendiculaire à l'axe, la trace du plan tangent sur le plan de la section devra être tangente à la section elle-même. Or, cette trace, ou l'intersection des deux plans, perce le plan H en d; si donc nous menons par le point d, à la section rabattue, les tangentes dk, dk', les points k, k', relevés en o, o' et o, o'' seront des points des génératrices de contact des plans tangents cherchés; et comme ces plans sont perpendiculaires au plan V, leurs traces ou les limites des cônes sont donc $s'o'$, $s'o''$, les tangentes percent d'ailleurs le plan V en m et m' qui doivent aussi se trouver sur $s'o'$ et $s'o''$.

Revenons à la question proposée, car ce qui précède lui est étranger.

Soit h la projection horizontale d'un point de la surface, ayant mené par ce point une section bc perpendiculaire à l'axe, et l'ayant rabattue, les points g et g' relevés, donnent les points cherchés h, v et h, v'.

Si le point v'' est donné en projection verticale, le plan perpendiculaire au plan V mené par ce point sera $v'' s's$. Ce plan coupe une section quelconque bc suivant la droite rabattue dp, cette droite coupe la section aux points q, r qui projetés en x, x', et y, y', donnent des points des génératrices qui contiennent les points cherchés; donc ces points se trouvent à la rencontre de $v'' h' h''$ avec les projections horizontales sx, sy, que nous venons de déterminer.

Pour savoir si un point donné appartient ou non à une surface conique, on mènera une droite par ce point et le sommet; suivant que cette droite percera le plan H hors de la trace de la surface, ou au dedans, ou sur la courbe, le point sera extérieur ou intérieur, ou sera l'un des points de la surface.

§ 126. *Plan tangent à une surface conique, trois cas.* — On démontrerait comme au § 107 qu'un plan tangent est déterminé par un point pris sur la surface, et donné par une projection, ou par un point extérieur, ou par la condition d'être parallèle à une droite donnée.

Cela posé, 1° soit proposé de mener un plan tangent à une surface conique par le point h *fig.* 242, pris sur la surface. Il y aura ici comme au § 107, deux plans tangents menés aux points h, v et h, v' : l'un contiendra la génératrice $as, a's'$ et l'autre la génératrice sb, $s'b'$. Ces génératrices ont pour traces, l'une le point a, l'autre le point b, et les tangentes à la trace de la surface menées par ces points, seront les traces horizontales des deux plans tangents, § 105. Les traces horizontales ao, bp, étant menées, il y aura plusieurs moyens de déterminer les traces verticales. D'abord, les génératrices de contact de chaque plan qui percent le plan V sur les traces des plans, l'un en q et l'autre en r. De plus, par le point de contact, on peut mener une horizontale, dont la projection horizontale est parallèle à la trace. La trace de cette ligne pour le plan *aoq* est en *k*, et pour l'autre en *k'*. Ces points vérifient l'exactitude des premières constructions. Enfin l'intersection des plans tangents doit passer par le sommet, ce qui est une autre vérification. Si la trace verticale existe, les traces verticales de tous les plans tangents doivent lui être tangentes.

2° Soit proposé de mener un plan tangent à une surface conique par un point *h*,*v*, *fig.* 243, extérieur à la surface. Ce plan devant passer par le sommet du cône, la droite *hs*, *v s'* qui joint le point donné au sommet, devra être contenue dans le plan tangent, et ses traces *t*, *t'*, sur celles du plan. Or, les traces horizontales doivent être tangentes à la base; donc *ta* et *tb* sont les traces horizontales des deux plans tangents que l'on peut mener par le point *h*, *v*. Les points de leurs traces verticales se détermineront en cherchant les traces *q* et *r* des génératrices *as*, *bs* de contact, ou celles de deux horizontales menées par *h*, *v*. Enfin on peut se contenter du point *t'* où les traces verticales des deux plans se coupent.

3° Soit proposé de mener un plan tangent à une surface conique parallèlement à une droite donnée, *ab*, *a'b'*, *fig.* 244. Le sommet *s*, *s'* devant être situé dans le plan, la droite *sc*, *s'c'*, menée parallèlement à *ab*, *a'b'*, sera contenue dans les plans tangents cherchés, et les constructions deviendront les mêmes que celles du cas précédent. Ce troisième cas n'est pas possible quand la droite, menée par le sommet parallèlement à la droite donnée, perce le plan H dans l'intérieur de la trace de la surface.

§ 127. *Plan tangent à un cône droit dans quelques cas particuliers.* — Les plans tangents au cône droit dont l'axe est vertical ne présentent rien de particulier dans les trois cas, *fig.* 245.

Le cône droit ayant son axe dans le plan H, *fig.* 246, le plan tangent au point *h*, *v*, ou au point *h*, *v'*, § 124, contiendra la tangente à la section droite menée par ce point.

Faisant cette section, et rabattant, les points k et k' sont les points de contact rabattus; alors les tangentes menées à la section sont les droites kt, $k't$ qui percent les plans H et V, l'une en t et t', l'autre en t et t''. L'un des plans tangents est donc tot' et l'autre est tot''. Les génératrices de contact peuvent encore servir à trouver des points des traces; ces plans ont ot pour trace horizontale commune.

Le point h, v, étant extérieur, *fig.* 247, on fera une section droite par ce point, on rabattra le point et la section, le premier en k. On mènera les tangentes kt, kr à la section rabattue. Ces tangentes ont pour traces t, t', r, r', qui appartiennent aux traces des plans tangents cherchés. Ces plans se coupent suivant la droite sf, $s'f'$.

Enfin, parallèlement à une droite donnée ab, $a'b'$, *fig.* 248, l'axe étant la ligne de terre, nous mènerons par le sommet s une parallèle à ab, $a'b'$, qui rencontrera une section faite perpendiculairement à l'axe en h, v. Nous rabattrons ce point et la section, et les constructions se conduiront comme au cas précédent.

§ 128. *Intersection d'une surface conique par une droite.* — Soient ab, $a'b'$ les projections de la droite donnée, *fig.* 249. Par cette droite et le sommet, nous ferons passer un plan, § 104; ce plan rencontrera la surface suivant une ou plusieurs génératrices, et les points de rencontre de ces droites et de la droite donnée, seront les points cherchés; cd, cd' sont les traces du plan; gs, $g's'$, ns, $n's'$, les projections des génératrices d'intersection, et hv, $h'v'$, les points de rencontre de la droite ab, $a'b'$ avec la surface.

Si la trace du plan était tangente à la base, la droite donnée serait elle-même tangente au cône; si elle ne rencontrait pas la base, la droite ne rencontrerait pas la surface. La droite po, $p'o'$ est tangente au cône au point o, o', et la droite xy, $x'y'$ ne rencontre pas le cône.

§ 129. *Intersection d'une surface conique par un plan.* — Nous mènerons, comme il est recommandé au § 104, les sections les plus simples possibles de la surface. Ce sont des plans qui la coupent suivant des génératrices. Nous mènerons ces plans perpendiculaires, soit au plan V, soit au plan H ; ces plans couperont le plan donné suivant des droites, et les points de rencontre de ces droites avec les génératrices de section seront des points de la courbe cherchée.

Soit *art* le plan coupant, *fig.* 250; un plan *s'a'*, mené par le sommet perpendiculairement au plan V, coupe la surface suivant les génératrices *bs, cs* dont la projection verticale est *a's'*, et le plan suivant la droite *ad, a'd'*. Cette droite rencontre les premières en *h, v, h', v'*, qui sont des points de la courbe cherchée.

Une génératrice limite, comme *sk*, de la projection horizontale, sera une tangente à la courbe au point de cette courbe *n* situé sur elle, sans que sa projection verticale soit tangente à la projection verticale de la courbe. Cela tient à ce que le plan tangent suivant *sk* est vertical, et que son intersection avec le plan sécant se projette nécessairement sur la trace horizontale *sk* de ce plan. De même *sk'* est une tangente ; *s'o'* et *s'g'* sont des tangentes à la projection verticale. Quelques tangentes menées à la courbe détermineront sa véritable forme.

Pour mener une tangente à la courbe au point *h, v*, nous mènerons un plan tangent *cqt'* suivant la génératrice *hs, vs'*, et l'intersection de ce plan avec le plan sécant est la tangente demandée, *hx, vx'*.

Les tangentes parallèles à *lt* en projection verticale, s'obtiendront en menant les plans tangents dont la trace horizontale est parallèle à la trace *ar* du plan sécant. Ces plans déterminent les tangentes *mn, m'n'*, et *pz, p'z'*, dont les projections horizontales sont parallèles à la trace *ar*, et dont les projections verticales sont parallèles à *lt*.

Pour avoir cette courbe dans sa véritable grandeur et forme, il faut la rabattre; ce rabattement donne la courbe *h''m''p''*... une tangente *hx*, dans ce rabattement, devient *xh''*, puisque *x* reste fixe.

Pour construire le développement de cette courbe, *fig.*

251, afin de pouvoir le rapporter sur la surface exécutée en relief, voici comment nous opèrerons: nous construirons d'abord les projections d'une section sphérique, § 101. Prenons une génératrice quelconque $s\,a$, $s'd'$. Rabattant son plan projetant, et le sommet en k, on a $a\,k$ pour longueur véritable de la génératrice; prenons à partir de k une longueur quelconque kg; g sera un point de la section sphérique faite à une distance $g\,k$ du sommet; ce point se projette en h, v; rabattant une autre génératrice en $a'k'$, et faisant $k'g' = kg$, le point g' appartient à la section sphérique, et projeté en $h'v'$, il donne un nouveau point de cette courbe. On détermine ainsi la courbe $hh'h''$..., $v\,v'\,v''$..., développant le cylindre projetant de cette courbe, on en cherchera le développement $uu'u''$; puis d'un point A comme centre avec un rayon kg, on décrira un arc, sur lequel on portera les petits arcs $u\,u'$, $u'\,u''$, $u''\,u'''$.... en $r\,r'$, $r'\,r''$, $r''\,r'''$.... On aura ainsi le développement de la section sphérique. Portant alors les distances ag, $a'g'$, $a''g''$... des points d'une section quelconque à la section sphérique sur les génératrices correspondantes Ar, Ar', Ar''..., on aura le développement de cette section. On aurait pu faire de la même manière celui de la section de la figure précédente.

Toutes les constructions que nous venons d'exécuter offrent plus de simplicité lorsque le cône est droit et à base circulaire, c'est-à-dire lorsque la génératrice fait avec l'axe un angle constant. Mais avant de parler de ces nouvelles dispositions, nous allons exposer les conditions générales qui font qu'un plan coupe une surface conique suivant l'une des trois courbes du deuxième degré.

§ 130. *Conditions pour qu'un plan coupe une surface conique suivant une des trois courbes du deuxième degré. Asymptotes de l'hyperbole.* — Lorsqu'un plan coupe une surface conique du deuxième degré, c'est-à-dire dont la directrice est du deuxième degré, de manière à rencontrer toutes les génératrices, la courbe est fermée, et le calcul démontre que c'est une ellipse. Si le plan est parallèle à deux génératrices, la courbe est une hyperbole. Si le plan est parallèle à une seule génératrice, la courbe est une parabole. Un moyen bien simple de s'assurer de la nature de la section, consiste à mener par le sommet du cône un plan parallèle au plan coupant; si la trace de ce plan ne rencontre pas la base du cône, ce plan passe par le sommet, sans contenir aucune génératrice; et alors on conçoit que tout plan qui lui sera parallèle coupera toutes les génératrices d'un même côté du sommet, et donnera une courbe fermée. Si le plan parallèle, mené par le sommet du cône, rencontre ce cône suivant deux génératrices, ce qui aura lieu si la trace horizontale rencontre la trace horizontale de la surface en deux points, le plan coupant donnera donc une hyperbole pour section. Si enfin la trace du plan parallèle est tangente à la base du cône, ce plan est tangent, le plan coupant est parallèle à une seule génératrice, et la courbe est une parabole.

On voit aisément, dans la *fig.* 250, que le plan $t'r'a'$ mené par le sommet parallèlement au plan tra, ne rencontre pas le cône, car sa trace ne rencontre pas la base.

Le plan $a'b'c'$ de la *fig.* 252, mené par le sommet parallèlement au plan coupant abc, rencontrant le cône suivant deux génératrices sd, sc, le plan abc donne une hyperbole pour section, dont les projections s'obtiennent comme au § 128.

Le plan $a'b'c'$ de la *fig.* 253, mené par le sommet parallèlement au plan coupant abc, étant tangent à la surface suivant la génératrice sc, le plan abc coupe le cône suivant une parabole, qu'on projettera comme les deux autres courbes.

On conçoit que réciproquement si l'on voulait couper une surface conique suivant une ellipse, une hyperbole ou une parabole, on mènerait par le sommet, ou un plan dont la trace ne coupât pas la trace de la surface, ou la coupât en deux points, ou lui fût tangente; puis on mènerait un plan parallèle à un de ces trois plans.

On peut se proposer de construire les asymptotes de l'hyperbole de la *fig.* 252. Une asymptote est une tangente, dont le point de contact est infiniment éloigné ; ce point ne peut donc être situé qu'à l'infini sur la courbe, et ne peut être donné que par l'intersection de la génératrice parallèle au plan sécant avec ce plan, car ce point est à l'infini ; or, toute tangente à la courbe qui nous occupe est déterminée par l'intersection du plan tangent et du plan coupant. Si donc nous menons par les génératrices parallèles au plan sécant *cs*, *ds*, *c's'*, *d's'*, des plans tangents au cône, leurs intersections avec le plan sécant, seront les asymptotes. On peut remarquer qu'elles seront parallèles aux génératrices *cs*, *ds*, comme intersections de plans parallèles par un troisième. Les traces des plans tangents sont *dh*, *cg* qui rencontrent en *h* et *g* les traces du plan sécant. Menant par les points *h* et *g* des parallèles aux génératrices de contact, ce seront les asymptotes de l'hyperbole de section. La parabole n'a pas d'asymptotes, car le plan coupant et le plan tangent mené, au point de la courbe situé à l'infini, étant parallèles, il n'y a pas de tangente à l'infini et partant point d'asymptotes.

§ 131. *Intersection d'un cône droit par un plan, trois cas, tangente, rabattement, développement ; projection oblique des sections.* — Le choix des plans de projection étant permis, on fera toujours bien de prendre pour plan vertical, un plan perpendiculaire au plan coupant ; de cette manière la section aura une droite pour projection verticale.

Lorsque le cône est droit, c'est-à-dire, lorsqu'il est engendré par une droite faisant avec l'axe un angle constant, on prendra pour plan vertical, un plan perpendiculaire au plan coupant, et parallèle à l'axe, et pour plan horizontal, un plan perpendiculaire au premier, on aura ainsi les dispositions des *fig.* 254, 255, 256.

On s'appliquera particulièrement à déterminer les axes des sections ; ainsi *fig.* 254, *abc* étant le plan coupant, *d'e'* est une des projections du grand axe et *de* l'autre ; pour avoir le petit axe, on prend le milieu de *d'e'*, et l'on fait passer une génératrice par ce point, qui rencontre le plan *abc* à l'extrémité du petit axe, par la seule raison que *d' e'* étant le grand, puisqu'il se projette en vraie grandeur, *fg* est le petit, puisqu'il est perpendiculaire à *de*, et passe par le centre.

Un point *m, m'* de chacune des sections dans les trois figures, pourra être déterminé par la méthode générale du § 128. On pourra aussi le trouver, en menant par *m'* la section parallèle et la projetant horizontalement; son intersection avec la verticale de *m'*, donne *m*; le point situé sur les génératrices qui se projettent sur l'axe, ne peut être déterminé que par ce procédé.

Une tangente en un point quelconque *m* se trouvera en menant le plan tangent *hc* en ce point, et cherchant l'intersection *cm, ba* de ces deux plans. La tangente dans le rabattement est *nm"*. Ce rabattement s'exécute comme il a été dit tant de fois. Les asymptotes de l'hyperbole se détermineront comme au § 129. *mn, pq,* sont les génératrices parallèles au plan coupant. *pt, mr* sont les traces horizontales des plans tangents, et les parallèles *tx, ry,* à *pq, mn,* sont les asymptotes de l'hyperbole.

Il reste à effectuer le développement des trois courbes, afin de pouvoir les enrouler sur le cône en relief exécuté autour. Pour cela, on décrira un cercle du point *s"* comme centre, *fig.* 257, avec un rayon égal à *s' k'* : on aura le développement de la base du cône, si l'on prend sur ce cercle une grandeur égale à $2\pi sk$, *fig.* 254, on pourra trouver plus facilement le développement de cet arc, en cherchant l'angle au centre, car les angles sont proportionnels aux rayons; soit donc *p" p'"* cet arc. Supposons qu'on ait coupé le cône suivant la génératrice *sp*, *fig.* 254...., et qu'on l'ait appliqué sur le plan tangent en *sk*. Dans le développement, *k"* occupera le milieu de l'arc *p" p'"*, *p"* et *p'"* les extrémités. Le développement de la première nappe est donc *s" p" p'"*; le développement de la deuxième est *s" q" q'"*.

Un point quelconque *m* de l'ellipse étant donné, pour avoir son développement, nous mènerons la génératrice *mh*, nous porterons l'arc $k\,h$ de k'' en k'' sur l'arc $p''\,p'''$; puis, pour avoir la distance du point m, m' au sommet, nous mènerons la section parallèle du point. Elle rencontre $s'.k'$ en x', tel que $x'\,s'$ égale la distance de tous les points du parallèle au sommet. Portant $x'\,s'$ de s'' en m'' sur $s''\ h''$, le point m'' sera le point m sur le développement. Ainsi de même pour les autres points, et l'on a la courbe $e''\,d''\ m''\,e'''$.

Pour développer l'hyperbole, nous construirons les sommets d, e, d', e'. Le sommet d'' est sur la génératrice fixe $s''\ k''$, en d'' tel que $d''\,k''=d'\,k'$. Le sommet e, e' est situé sur les prolongements $s''\,q''$, $s''\,q'''$ de $s''\,p'''$, $s''\,p''$ à une distance du sommet s'' de $s''\,e''=s''\,e'''=s'\,e'$. Les points g, z, viennent en $g''\,z''$, tels que l'arc $k\,g=k\,z=k''\,z''$, les points analogues $g'\,z'$ de l'autre branche seront trouvés en traçant sg' et sz' et les prolongeant en v et o. Alors portant *arc* $k\,o=k\,v$ de k'' en o'' et v'', les points $z'''\,g'''$, seront les développements des points $g'\,z'$. Les asymptotes prendront les positions $t''\,x''$, $r''\,y''$.

Le développement de la parabole n'offre rien de particulier. Pour faire ces développements, il y aura de l'avantage à partager la base en parties égales, et l'arc $p''\,p'''$ de son développement en un même nombre de parties.

Pour mettre ces sections en projection oblique, on mettra la base du cône et le sommet en projection oblique, ainsi que les points de division de la base, et l'on mènera les génératrices. Par les projections orthogonales des points de la section, on mènera des lignes inclinées à 30 deg., qui rencontreront les génératrices au point de la section correspondant à ces génératrices. Voyez *fig.* 254 *bis*, 255 *bis*, 256 *bis*.

§ 132. *Intersection d'un cône et d'un cylindre ; de deux cônes.* — La méthode du paragraphe 104, nous conduit encore à mener des plans qui coupent les surfaces suivant des génératrices, et ces génératrices se rencontrent en des points, qui sont des points de la courbe d'intersection des deux surfaces.

Pour qu'un plan coupe un cône suivant des génératrices, il faut qu'il passe par le sommet. Tous ces plans devront donc contenir le sommet de la surface conique. Par ce point, on mènera une parallèle aux génératrices du cylindre, et tout plan qui passera par cette parallèle, s'il rencontre à la fois les deux surfaces, donnera lieu à des points de la courbe d'intersection.

La parallèle sa, $s'a'$, menée par le sommet s, s', *fig.* 258, aux génératrices du cylindre, a pour trace le point a. Si par ce point nous menons une droite $abcde$ qui coupe les deux bases, le plan qui aura cette droite pour trace horizontale, et qui passera par le sommet, coupera les deux surfaces suivant des génératrices. Ces dernières sont bf, $b'f'$, cg, $c'g'$ pour le cylindre, et sd, $s'd'$, se, $s'e'$ pour le cône. Ces quatre droites se coupent aux points de la courbe h, h', h'', h''', v, v', v'', v'''.

Ici les limites des plans menés par le point a, sont les plans dont les traces sont les tangentes ai, ak à la trace du cône. Ce dernier traverse donc le cylindre, et il y a pénétration.

En général, il y a pénétration, si les tangentes à l'une des deux bases menées par le point a rencontrent à la fois l'autre base. Il y a arrachement, quand il n'y a qu'une tangente à chaque base qui rencontre l'autre.

Il est également important de déterminer les points donnés par les plans limites ai, ak, parce que leurs tangentes se trouvent être précisément l'une des génératrices de l'une ou l'autre surface. Nous répéterons ici le même raisonnement qu'au § 114. Le plan ai est tangent au cône, suivant si, $s'i'$, La tangente en p, p', qui est l'intersection des deux plans tangents aux deux surfaces, est donc l'intersection de ce plan et du plan tangent au cylindre suivant pq, $p'q'$, l'intersection de ces deux plans est précisément la génératrice pq, $p'q'$ du cylindre.

Donc encore comme au § 114, lorsqu'un des plans est tangent à l'une des surfaces, il coupe l'autre surface suivant des génératrices qui sont des tangentes à la courbe.

On déterminera également, et autant que possible les points qui sont sur les génératrices limites, soit de la projection horizontale, soit de la projection verticale ; car les tangentes à ces points sur une projection de la courbe, sont les génératrices elles-mêmes, sans que les autres projections de ces génératrices soient tangentes à l'autre projection de la courbe.

La tangente en un point quelconque se déterminera par l'intersection des deux plans tangents aux deux surfaces menés par les génératrices des deux surfaces qui passent par ce point. La tangente en m, m' est $tm, t'm'$.

Pour tracer la projection oblique de cette intersection, on mettrait le cône et le cylindre en projection oblique, ainsi que le point *a*. On mènerait par ce point une suite de droites rencontrant à la fois les bases des deux surfaces, et l'on chercherait les intersections des génératrices données par cette construction, *fig.* 258 *bis*.

On n'éprouverait aucune difficulté, après ce qui vient d'être dit, pour chercher l'intersection de deux cônes. Il est clair que les plans auxiliaires devront ici passer par les deux sommets, et que par suite, c'est par la ligne qui les joint, qu'il faut faire passer ces plans ; les constructions s'achèvent comme nous venons de le faire, *fig.* 259 et 259 *bis*.

§ 133. *Application aux robinets.* — Les modeleurs ont souvent l'occasion d'appliquer l'intersection d'un cône et d'un cylindre dans les robinets.

Soit la *fig.* 260, où le conduit cylindrique droit à base circulaire, et le cône dont l'axe est perpendiculaire au plan V, se trouvent projetés. On pourra choisir ici pour plans auxiliaires, des plans parallèles au plan V, qui coupent le cylindre suivant des génératrices et le cône suivant des cercles. Un plan tel que $a\,b$ coupe le cône suivant le petit cercle $a'\,b'$. Le même plan coupe une section rabattue du cylindre aux points *k* et *k'* qui, relevés, donnent les génératrices *a b*, *a'' b''*, *a b*, *a''' b'''*. Ces droites rencontrent le cercle *a' b'* aux points *m*, *n*, *m'*, *n'*, *m''*, *n''*, qui sont des points de la courbe cherchée.

Ce cylindre et ce cône étant développés séparément, ainsi que les courbes qui sont tracées sur eux, on obtient la *fig.* 260 *bis*, qui offre le moyen de tracer ces courbes sur les solides en relief, et de creuser dans le cylindre la trace du cône, ou enfin de les assembler.

Les deux corps assemblés sont représentés, *fig.* 260 *ter*, en projection oblique.

DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

§ 134. *De la représentation de ces surfaces.* — Une surface de révolution sera déterminée, lorsqu'on connaîtra les projections de l'axe et la véritable forme de la courbe génératrice.

En effet, soit *a*, *a' a''*, *fig.* 261, les projections de l'axe. Soit *b' c' d'* la véritable grandeur de la génératrice, ou, ce qui est la même chose, la section faite dans cette surface par le plan *a d* parallèle au plan V. On pourra construire avec ces données, les projections d'une génératrice de la surface dans l'une quelconque de ses positions; car, soit *a e f* le plan de cette position; on fera tourner ce plan jusqu'à ce qu'il se confonde avec *a d*. Alors les sections coïncideront, et un point *h*, *v* de la section *a d*, deviendra *h'*, *v'* sur la section *a e*, § 51, *fig.* 84. On déterminera donc ainsi autant de génératrices qu'on voudra.

Les limites de la surface en projection verticale sont les deux courbes égales *b' c' d'*, *b'' c'' d''*; les limites en projection horizontale sont données par la section parallèle la plus grande, déterminée par le point de contact de la tangente à la courbe *b' c' d'* menée parallèlement à *a' a''*.

§ 135. *Un point d'une surface de révolution étant donné par l'une de ses projections, trouver l'autre.* — Soit h' la projection horizontale, *fig.* 261. La perpendiculaire $h'v'$ à lt contiendra la projection verticale. Or, la verticale du point h' rencontre la section méridienne, ah', menée par le point. Si l'on fait tourner cette section pour la ramener en ad, le point h' vient en h, et sa projection verticale est v sur la courbe $b'c'd'$. Donc, en ramenant le plan dans sa première position, le point h, v, ne change pas de distance au plan H, et sa projection verticale reste sur $v\,v'$ parallèle à lt. Donc enfin, l'intersection de $h'v'$ et de vv' est la projection verticale cherchée. Le point r' est également la projection verticale d'un point de la surface dont h' est la projection horizontale.

Les projections d'un point étant données, m, m', pour s'assurer si ce point est sur la surface, à l'extérieur ou à l'intérieur, on fera passer un méridien par ce point, et on le rabattra sur celui qui est parallèle au plan V, en rabattant le point en p, p'. Suivant que p, p' sera hors de la courbe $a'b'c'd'$, ou dedans, ou sur elle, le point m, m' sera hors de la surface, ou à l'intérieur, ou sur elle-même.

§ 136. *Tout plan tangent à une surface de révolution est perpendiculaire au plan méridien qui passe par le point de contact.* — En effet, pour mener le plan tangent à une surface de révolution par un point, nous ferons par ce point h'', v'' (*fig.* 261), la section méridienne, et la section parallèle dont le centre est en o sur l'axe, et nous mènerons la tangente à chaque section par le point $h''v''$. Le plan tangent passera par ces deux tangentes. Or, le plan de la section méridienne est perpendiculaire à celui de la section parallèle; l'intersection de ces deux plans est la ligne ah'', ov'', rayon du parallèle; donc la tangente à la section parallèle, est perpendiculaire au méridien (78), et comme le plan tangent passe par cette tangente, il est donc perpendiculaire au méridien.

§ 137. *Plan tangent à une surface de révolution par un* *point.* — Soit h, le point donné, (*fig.* 262), on déterminera, comme il vient d'être dit (§ 134) les projections v, v' de deux points qui ont h pour projection horizontale commune. La tangente au point h, v à la section parallèle, a hg perpendiculaire à ah pour projection horizontale, et vr pour projection verticale parallèle à lt. La tangente à la section méridienne en h', v'', est $v''d$, qui rencontre l'axe en d. En faisant revenir le plan, ce point reste fixe, et la tangente à la méridienne en h, v passe encore par ce point. Donc cette tangente est dv, ah. On a maintenant les éléments nécessaires pour mener le plan tangent dont la trace horizontale tk est perpendiculaire à ah, et parallèle à hg. La trace verticale passe par les traces des deux tangentes. On trouverait de la même manière le plan tangent au point h, v' dont les traces sont yz, zu. L'intersection de ces deux plans est l'horizontale $ef, e'f'$.

§ 138. *Plan tangent à la sphère par un point.* — Le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au rayon. Donc ce plan sera déterminé lorsqu'on connaîtra le point de contact.

Nous pouvons transporter les plans de projection au centre de la sphère, alors elle sera limitée par les deux grands cercles suivant lesquels les plans H et V la coupent, ces deux grands cercles se recouvrant l'un l'autre dans le rabattement des plans H et V, (*fig.* 263). Soit h la projection horizontale du point donné. On trouvera comme précédemment ses projections verticales v, v'. Le rayon du point de contact h, v sera donc oh, ov; celui du point h, v' sera oh, ov'. Les traces des plans tangents devront être respectivement perpendiculaires à ces lignes. Menons en h, v l'horizontale hk, vr dont la projection horizontale hk soit perpendiculaire à oh; cette ligne sera située dans le plan tangent, elle ne sera d'ailleurs que la tangente à la section parallèle. Sa trace r détermine la trace verticale du plan tangent, laquelle est perpendiculaire à vo. Les deux plans tangents ont pour intersection leur trace horizontale commune xy.

§ 139. *Plan tangent à une surface de révolution par un point extérieur. — Lieu géométrique des points de contact. — Plan tangent parallèlement à une droite.* — Le problème du plan tangent par un point extérieur est indéterminé, et l'on peut en mener une infinité. Si l'on veut se proposer, par exemple, de trouver ceux dont les points de contact sont situés sur un même parallèle $a\ b$, $a'\ b'$ (*fig.*264), nous mènerons en b' une tangente à la génératrice, et nous la ferons tourner avec elle : cette droite engendrera un cône droit tangent ou enveloppe à la surface de révolution. Les plans tangents menés par le point donné p, p' à ce cône seront tangents à la surface de révolution. Or, joignant ce point au sommet, § 125, cette droite rencontre la base en k', k' par lequel menant les tangentes $k\,m$, $k\,n$ les points m, m' et n, n' sont les points de contact demandés.

On trouverait de même autant de points de contact qu'on voudrait de plans tangents à la surface de révolution. La série de ces points formerait une courbe qui serait la courbe de contact d'une surface conique *enveloppe* de la surface de révolution, et dont le sommet serait le point donné p, p'. En effet, toutes les droites qui joignent le point p, p' à chaque point de contact, sont des tangentes à la surface de révolution, puisqu'elles sont contenues dans les plans tangents.

Il y a des points de cette courbe qu'il est important de déterminer directement, quand on veut la construire. Ce sont d'abord les points pour lesquels la tangente est horizontale, ou bien le point le plus haut, et le point le plus bas de la courbe. Ces points sont évidemment dans le plan méridien mené par le point p, p', (*fig.* 265), rabattant ce plan et le point p, p' parallèlement au plan V, le point p, p' en q, q', les tangentes $q'\,r'$, $q'\,o'$ se transforment par le retour du plan en $p'\,s'$ et $p'\,t'$. Les points s, s' et t, t' sont donc les points de contact cherchés.

On peut également trouver les points pour lesquels les plans tangents sont verticaux. Ils sont donnés par les tangentes $p\,g$, $p\,h$ à la plus grande section parallèle : ce sont les points g, g' et h, h', enfin les points de contact des plans perpendiculaires au plan V sont y, y', z, z'.

On trouverait de la même manière la courbe de contact d'un cylindre enveloppe de la surface et dont les génératrices seraient parallèles à une droite donnée. Au lieu de mener aux cônes droits précédents des plans tangents par le point p, p', on les mènerait parallèlement à la droite donnée. Leurs points de contact détermineraient ainsi des points de la courbe de contact du cylindre enveloppe dont la génératrice serait parallèle à la droite donnée; ce qui fournit le moyen de mener un plan tangent à une surface de révolution parallèlement à une droite donnée. Le problème est encore susceptible d'une infinité de solutions.

§ 140. *Plan tangent à une surface de révolution par une droite.* — Soit $ab, a'b'$ la droite donnée, *fig.* 266. On prendra un point a, a' sur cette droite, et l'on construira la courbe de contact d'un cône enveloppe à la surface, ayant ce point pour sommet. Les plans tangents qui seraient menés à ce cône par la droite, seraient aussi tangents à la surface de révolution, et leurs points de contact seraient situés sur la courbe de contact des deux surfaces. Prenant un second point b, b' sur la droite, on mènera un second cône enveloppe, qui touchera la surface suivant une nouvelle courbe, qui devra contenir également tous les points de contact des plans tangents menés par la droite à la surface de révolution. Donc ces points de contact se trouveront à la rencontre de ces deux courbes.

La courbe de contact du cône a, a' est $defg, d'e'f'g'$, et celle du cône b, b' est $mnop, m'n'o'p'$. Ces deux courbes se coupent aux points x, x', y, y' qui sont les points de contact des deux plans tangents qu'on peut mener par la droite $ab, a'b'$ à la surface de révolution. Le problème est résolu, car un point et une droite déterminent un plan.

§ 141. *Plan tangent à une sphère par une droite.* — Le problème est plus facile à résoudre pour une sphère, parce qu'on peut se dispenser de projeter les courbes de contact.

En effet, soit $a b'$, $a' b$ la droite donnée, *fig.* 267. Prenons les traces a et b de la droite, pour sommets des cônes. Pour engendrer le cône a, nous joindrons le point a au centre c, nous mènerons une tangente $a d$ au cercle de la sphère situé dans le plan H; puis faisant tourner ce cercle et la tangente autour de $a c$, $a d$ engendrera un cône enveloppe, et d décrira dans ce mouvement un petit cercle de la sphère dont le plan sera perpendiculaire à l'axe de rotation $a c$; c'est-à-dire qu'il sera vertical. Ce petit cercle se projette donc en $d e$. Les plans tangents menés par la droite à ce cône se confondront avec les plans tangents cherchés, menés à la sphère, et leurs points de contact, situés sur le petit cercle $d e$, se projetteront horizontalement sur $d e$. Enfin, la ligne qui joint ces deux points aura donc $d e$ pour projection horizontale.

De même, prenant le point b pour sommet du second cône, nous joindrons $b c$, et nous mènerons $b d'$ tangente au cercle de la sphère situé dans le plan V. Les plans tangents à ce nouveau cône se confondront également avec les plans tangents à la sphère, et leurs points de contact situés sur le petit cercle $d' e'$ perpendiculaire au plan V, se projetteront verticalement sur la droite $d' e'$. Donc enfin, la droite qui joint les points de contact cherchés aura $d e$ pour projection horizontale et $d' e'$ pour projection verticale; ou bien elle sera l'intersection des deux petits cercles $d e$, $d' e'$, l'un perpendiculaire au plan H, l'autre perpendiculaire au plan V.

Il est à remarquer que si l'on prenait un troisième point sur la droite donnée, et qu'on prît ce point pour sommet d'un nouveau cône enveloppe, les points de contact des deux plans tangents à la sphère menés par la droite se trouveraient encore situés sur le petit cercle de contact. Tous ces petits cercles se coupent donc en deux points sur la surface de la sphère.

Pour trouver les points de contact, nous rabattrons la ligne qui les joint, en rabattant l'un de ses plans projetants $d e$. Ce petit cercle rabattu est décrit sur de comme diamètre. La trace horizontale p de la droite ne change pas dans le mouvement, et un point m, m' quelconque de cette droite se rabat en m'' tel que $mm'' = m'q$. Le rabattement de la droite des contacts est donc $m''p$, qui rencontre le petit cercle rabattu aux points k et k'. Ces points étant relevés, en h, v et h', v', donnent les points de contact des plans tangents, dont les traces sont faciles à déterminer, car elles sont perpendiculaires aux rayons menés par ces points.

§ 142. *Plan tangent à une surface de révolution parallèlement à un plan. Cas de la sphère.* — Ce problème est déterminé. Nous prendrons deux droites quelconques dans le plan, et nous mènerons deux cylindres enveloppes, dont les génératrices soient parallèles à ces deux droites, § 138. Les courbes de contact se couperont en des points qui seront les points de contact des plans tangents cherchés.

Le problème est plus facile quand il s'agit de la sphère. Soit abc le plan donné, *fig.* 268, du centre o, nous abaisserons une perpendiculaire od, od', sur le plan, et nous chercherons la rencontre de cette droite avec la sphère. Par les points de rencontre, il ne restera plus qu'à mener des plans parallèles au plan donné.

La droite od, od', est située dans le plan méridien od, qui coupe la sphère suivant un grand cercle. Rabattons ce dernier sur le plan V ; un point d, d', de la droite devient e, e', et la droite rabattue est $e'o$. Cette droite rencontre le grand cercle en k, k', qui relevés, deviennent h, v, h', v'. Tels sont donc les points de rencontre de la perpendiculaire od, od', au plan, avec la sphère, ou les points de contact des plans tangents à la sphère menés parallèlement au plan abc.

§ 143. *Intersection d'une surface de révolution par une droite.* — Par cette droite nous ferons passer un plan qui coupera la surface suivant une courbe, et les points où la droite rencontrera la courbe, seront les points d'intersection de la droite et de la surface.

Pour résoudre cette question, il est donc nécessaire de savoir déterminer l'intersection d'une surface de révolution par un plan. C'est une question que nous allons bientôt résoudre.

Lorsque la surface de révolution est une sphère, le problème peut être résolu sans construire de courbe. Soit *a b*, *a' b'*, la droite donnée, *fig.* 269, faisons passer par cette droite son plan projetant vertical. Ce plan coupe la sphère suivant un petit cercle vertical dont le diamètre est *c b*, et qui se projette horizontalement suivant *c b*. Rabattons ce petit cercle sur le plan H, et la droite en *g b*. Les points de rencontre *k* et *k'* de ce rabattement, et du petit cercle, étant relevés en *h*, *v*, et *h'*, *v'*, donnent les points de rencontre de la sphère et de la droite donnée.

§.144. *Intersection d'une surface de révolution par un plan.* — Les plus simples sections d'une surface de révolution, sont les sections parallèles. Nous mènerons donc un certain nombre de ces sections, nous chercherons les lignes d'intersection de leurs plans avec le plan donné, et les points de rencontre des sections et de ces lignes, seront des points de la courbe cherchée.

Soit *abc*, le plan coupant, *fig.* 270, un plan horizontal *d'e'* coupe la surface suivant le parallèle *de*, *d'e'*, et coupe le plan suivant la droite *fg*, *f'g'*. Le petit cercle et la droite se rencontrent aux points *m*, *m'* et *n*, *n'*, qui sont des points de la courbe. Les points situés sur le grand cercle limite de de la projection horizontale seront donnés par le plan *k'l'*, les points limites situés sur la projection verticale, seront donnés par le plan *p q* parallèle à V. Le point le plus haut, et le point le plus bas de la courbe, ou pour lesquels la tangente est horizontale, seront donnés par le méridien dont la trace *r s* est perpendiculaire à *b c*; car cette tangente étant horizontale, sa projection horizontale sera parallèle à la trace *b c* et à celle du plan tangent; d'où il suit que cette dernière sera parallèle à *b c*. Or la trace du plan tangent doit être perpendiculaire à celle du méridien, qui passe par le point de contact, § 136; donc *r s* est la trace du méridien qui doit donner les points cherchés. Sans projeter le méridien, on peut trouver ces points, en rabattant ce méridien parallèlement à V, l'intersection des deux plans prend la position *p q*, *p'q'*, qui rencontre en *k* et *k'* la ligne méridienne. Ces points se relèvent en *t*, *t'*, et *u u'*, qui sont le point le plus haut et le point le plus bas de la courbe, ou ceux pour lesquels la tangente en projection verticale est parallèle à *l t*.

§ 145. *Intersection d'une sphère par un plan.* — La section étant un cercle, nous en déterminerons d'abord le centre en abaissant du centre de la sphère une perpendiculaire sur le plan qui le rencontre en *c*, *c'* centre de la section *fig.* 271, on pourrait, comme précédemment, trouver les points de la courbe par la méthode générale; mais il est préférable de chercher les axes des deux ellipses. Pour cela, on mène par le centre une parallèle *d e* à la trace horizontale du plan. Cette parallèle sera la direction du grand axe de la projection horizontale, et la parallèle *fg* à la trace verticale du plan, sera la direction du grand axe de la projection verticale de la courbe cherchée. Pour trouver la longueur du grand axe de chaque projection, on peut rabattre ce grand axe *d e*, *d'e'* sur le plan H, en rabattant son plan projetant ; et cherchant les points *k* et *k'* où il rencontre la sphère, les relever en *d* et *e*, *d'* et *e'*; ou bien, chercher la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre *o* sur le plan, et le côté d'un triangle rectangle dont cette longueur serait un côté et le rayon de la sphère l'autre. Pour trouver le petit axe de chaque courbe nous rabattrons le plan vertical de ce petit axe *c o* autour de *c o* et le plan de la courbe autour de *d e* : le diamètre donnant le petit axe prendra la position *h l*, faisant avec *c o* l'angle du plan donné avec l'horizon. Le point *h* relevé en *m*, *m'*, donne *c m* pour petit axe de la projection horizontale.

On trouverait de la même manière le petit axe de la projection verticale.

§ 146. *Intersection d'une sphère par un prisme ; application aux écrous.* — L'intersection d'une sphère par un prisme se réduit à la recherche de l'intersection d'une sphère par une suite de plans. Soit le prisme *a b c d e f*, *fig.* 272, et la sphère ayant même axe vertical. La section de la sphère par le plan *a b* ou *d e* parallèle au plan V, est un petit cercle dont *g h* est le diamètre. La partie utile de cette intersection est *a b*, *a' b'*. L'intersection de la sphère par la face *b c* ou *o d* est le même petit cercle dont la projection verticale est une ellipse qui a son centre en *o*, *o'* : le grand axe est égal à *g h* diamètre du petit cercle, et se limite en *o' m'* à la tangente au cercle *g h* mené par le point *i*, la partie utile de cette courbe est *b c*, *b' c'* limitée à la parallèle *a' b' c'* à *l t*.

Les têtes d'écrous sont souvent façonnées en prismes terminés par une sphère ; on en trouve la projection complète *fig.* 272 (*bis*).

§ 147. *Intersection de deux surfaces de révolution*, *de deux sphères*. — Nous prendrons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'un des axes, et pour plan vertical un plan parallèle aux deux axes. Supposons que les deux axes soient dans le même plan, et soient *a*, *a' a''*, le 1er axe *fig.* 273, et *b c*, *b' c'* le second. Ces deux axes se rencontrent au point *a*, *o*. Si l'on prend le point *o* pour centre d'une sphère qui coupe à la fois les deux surfaces et d'un rayon *o d* par exemple, cette sphère rencontrera les deux surfaces suivant deux parallèles *de*, *fg* de chacune des surfaces. Ces parallèles, tracés sur la même sphère, s'ils se rencontrent, donneront des points de la courbe d'intersection des deux surfaces. Ces parallèles se rencontrent suivant la ligne *h*, *h' h''* et les deux points de rencontre, se projettent horizontalement à la rencontre de *h' h''* avec le cercle *d e* decrit de *a* comme centre. On déterminera ainsi autant de points qu'on voudra de la ligne d'intersection.

Supposons deux sphères pour surfaces de révolution. L'intersection est un petit cercle dont le plan est perpendiculaire à la ligne des centres. Soient *o* *fig.* 274, le centre de l'une des sphères, et *a*, *a'* le centre de l'autre. La ligne qui joint ces deux points est *o a*, *o a'*. Rabattant le plan projetant de cette ligne, et les grands cercles suivant lesquels ils coupent les sphères, ces cercles se coupent aux points *b* et *d* et la ligne bd est le diamètre du petit cercle, intersection des deux sphères. Le centre de ce cercle est donc en e qui se projette en c, c'. Il ne reste plus qu'à trouver les axes des ellipses, projections du petit cercle. Puisque le plan du petit cercle est perpendiculaire à la ligne oa, oa', ses traces seront perpendiculaires à cette ligne, et par suite, le grand axe de la projection horizontale du petit cercle, sera perpendiculaire à oa, et le grand axe de la projection verticale perpendiculaire à oa', leur longueur est bd. On trouve le petit axe comme nous l'avons fait tant de fois en rabattant le diamètre qui doit le donner en cp faisant avec co l'angle complémentaire de celui que fait ao, oa', avec le plan H, et prenant $cp = be$, projetant ensuite p et q, la ligne cq est le petit axe de la projection du petit cercle d'intersection des deux sphères.

§ 148. *Intersection d'une sphère et d'un cylindre droit.*— Soit a, a' le centre de la sphère (*fig.* 275). Soit $c, c'c''$ l'axe du cylindre. Pour déterminer des points de la courbe d'intersection, nous mènerons un plan dd parallèle au plan V; ce plan coupe la sphère suivant le cercle $dd, d'd'$ et le cylindre suivant les génératrices $e, e'e''$ et $f, f'f''$, ces génératrices coupent le cercle au point e', e'' et f', f'', qui sont des points de la courbe.

Les génératrices du cylindre, aux points e, f, sont des tangentes à la courbe, car les plans tangents au cylindre sont ici perpendicuaires à lt, puisque le plan dd passe par l'axe. Le plan qui passe par le centre a de la sphère, détermine les points de la courbe $g'g''$, $h'h''$ pour lesquels le grand cercle de projection verticale de la sphère et la projection verticale de la courbe ont une tangente commune. En effet, pour ces points, le plan tangent à la sphère est perpendiculaire au plan V; car le rayon du point de contact lui est parallèle; donc l'intersection des deux plans tangents ou la tangente à la courbe, se projette verticalement sur la trace de ce plan.

Enfin, si l'on mène les plans tangents au cylindre, mn, pq, ces plans donnent lieu aux points r', r'', s', s'', pour les quels les rayons $a'r'$, $a's'$, $a'r''$ $a's''$ sont des normales a la courbe ou auxquels points la courbe est tangente aux petits cercles de diamètres pq et mn, décrits du point a' comme centre. En effet, si l'on veut trouver la tangente au point r,r' par exemple, il faudra mener les plans tangents aux deux surfaces. L'un de ces plans est pq, la tangente au petit cercle pq en r,r' contenue dans le plan tangent pq au cylindre, sera également contenue dans le plan tangent à la sphère, donc elle est l'intersection de ces deux plans, et c'est aussi la tangente à la courbe cherchée en r,r'. Elle a pour projection pq, et la tangente au petit cercle menée en r'.

Le développement de cette courbe est exécuté *fig.* 275 *bis.*

La figure 276 nous offre une application de ce problème à la construction d'une boîte à étoupes. Pour exécuter le modèle de cette pièce, il faut en effet chercher l'intersection d'une sphère par un cylindre droit dont la base est une suite d'arcs de cercle raccordés ensemble et formant la courbe $abcdef$. L'intersection étant développée, donne le moyen d'exécuter les deux corps en relief, et de les assembler.

DES SURFACES GAUCHES.

§ 149. *Du plan gauche, ou paraboloïde hyperbolique. Représentation de cette surface. Trouver un point.* — Nous avons défini les surfaces gauches § 102 ; nous ne traiterons ici que du *plan gauche*, surface engendrée par une droite assujétie à se mouvoir sur deux autres en restant constamment parallèle à un plan nommé *plan directeur*.

Prenons pour plan horizontal un plan perpendiculaire à l'une des directrices, et ce plan lui-même pour plan directeur. Soit $a,a'a''$ *fig.* 277, la première directrice, et bc, $b'c'$ la seconde. Toutes les génératrices de la surface devant être parallèles au plan directeur, elles seront toutes horizontales

Soit $d'e'$ par exemple la projection verticale de l'une d'elles, s'appuyant en d' et e' sur les deux directrices. Ces points se projettent en a et e, et la ligne ae est la projection horizontale de la génératrice. De même, si af qui s'appuie sur les deux directrices, en projection horizontale, est la projection horizontale d'une génératrice, pour avoir la projection verticale, il suffit de projeter le point f en f', et par le point f' de mener une parallèle à lt.

On déterminera donc ainsi autant de génératrices qu'on voudra de cette surface.

Il est aisé de remarquer que l'une d'elles, la génératrice ag, a pour projection le point g', elle est perpendiculaire au plan V. Une autre hi, $h'i'$ est parallèle à la ligne de terre; une troisième a sa projection horizontale kl parallèle à bc, et ne s'appuie sur cette ligne qu'en un point infiniment éloigné; d'où il suit que la projection verticale de cette génératrice sera située à l'infini, au-dessus de la ligne de terre, et toujours parallèlement à cette ligne; il y a enfin une des génératrices situées dans le plan horizontal de projection; c'est la génératrice am qui passe par les points a et m où les directrices percent le plan H; cette droite est la trace de la surface sur le plan horizontal de projection.

Cette surface est évidemment coupée suivant des droites par des plans horizontaux; car une génératrice quelconque comme de, $d'e'$ est toujours située dans l'un de ces plans $d'e'$. Pour trouver l'intersection de cette surface par un plan horizontal quelconque, il suffit donc de chercher les points où ce plan coupe les deux directrices, et de joindre ces points par une droite.

Un point de cette surface étant donné en projection horizontale p, pour trouver sa projection verticale, nous mènerons la génératrice qui passe par ce point, et son intersection avec la perpendiculaire pp' à lt, donne le point p, p'.

150. *Double génération du paraboloïde hyperbolique.* — Cette surface est susceptible d'être engendrée de deux ma-

nières par une droite. Pour le démontrer, nous ferons voir que telle qu'elle est décrite et engendrée, dans le paragraphe précédent, elle peut être coupée par un second système de plans parallèles suivant des droites, comme elle est coupée suivant des droites par un système de plans parallèles au plan directeur. En effet, soient aa', bb', les deux directrices *fig.* 278, et mn le plan directeur; la ligne ab qui joint les points de rencontre des directrices avec le plan mn est une génératrice de la surface. Un second plan parallèle au plan mn coupe ces deux directrices en a' et b' tels que a' b' est aussi une génératrice de la surface. Soit enfin $a''b''$ une 3e génératrice, menons $b'k'$ et $b''k''$ parallèles à aa'; tirons $bk''k'$, ak' et ak'', cette dernière ligne est parallèle à $a''b''$ et ak' l'est à $a'b'$; menons un plan $do'd'$ parallèle aux deux premières directrices aa' et bb', il coupera aa' et bb' en d et d', le plan mn suivant $o'd$ parallèle à bk', et le plan aa' $b'k'$ suivant $o'd'$ parallèle à $b'k'$. Joignons dd', puis par le point o'', rencontre des deux lignes do' et ak'', menons $o''d''$ parallèle à aa'. Cette parallèle sera à la fois située dans le plan ab'' et dans le plan $do'd'$; donc elle rencontrera à la fois $a''b''$ et dd'; prouvons que cette rencontre se fait au même point; appelons d'' le point de rencontre de la parallèle avec dd' et o''' le point de rencontre avec $a''b''$. On aura pour la première $o''d'' : o'd' :: o''d : o'd :: bk'' : bk' :: k''b'' : b'k'$, ou, en réunissant les deux derniers rapports... $o''d'' : o'd' :: k''b'' : k'b'$. Mais $o''o'''$ égalant $b''k''$, et $o'd'$ égalant $b'k'$, on a $o''d'' : o'd' :: o''o''' : o'd'$, d'où $o''d'' = o''o'''$.

Ce résultat prouve que dd' rencontre $a''b''$ en d''. D'où il suit que toutes les génératrices de la surface sont coupées par un plan tel que $do'd'$, parallèle aux directrices aa', bb', en des points d, d', d'' qui sont en ligne droite. Donc la surface peut être coupée suivant des droites par un système de plans parallèles entre eux et aux deux directrices. De là, il est aisé de conclure la double génération de la surface. En effet, dire que la surface peut être coupée suivant une droite par le plan $do'd'$, n'est-ce pas dire que la droite dd' qui s'appuie en d et en d' sur les deux génératrices de première génération ab, $a'b'$, a tous ses points sur la surface, et y est toute entière contenue. Si donc on prenait cette droite dd' pour génératrice, qu'on l'assujétît à s'appuyer sur les deux directrices ab, $a'b'$, en restant parallèle à un plan parallèle lui-même aux deux premières directrices, la même surface serait engendrée par cette droite.

La figure $aa'b'b$ est formée de deux génératrices aa', bb' du second système de génération, et de deux génératrices ab, $a'b'$ du premier. Les deux premières sont les directrices de la seconde génération, et les deux autres, les directrices de la première. On voit donc que ce *quadrilatère gauche* auquel la surface doit sa première dénomination de *plan gauche*, renferme les éléments qui servent à déterminer la surface; le premier plan directeur est parallèle à ab, $a'b'$, et le second à aa', bb'. Une droite glissant sur aa', bb', parallèlement au premierplan, ou glissant sur ab, $a'b'$ parallèlement au second plan, décrit également la surface.

On tire comme conséquence de ce qui vient d'être démontré que : *une génératrice de première génération rencontre toutes celles de deuxième et réciproquement.*

Enfin, comme les droites aa', bb', sont divisées aux points a'', b'', en parties proportionnelles, on voit que si l'on divise deux droites quelconques en parties égales, et qu'on joigne les points de division deux à deux, la série des droites ainsi tracées, engendrera un paraboloïde hyperbolique, dont le plan directeur sera parallèle à ces droites, et les deux directrices seront les droites données; ce qui fournit le moyen de construire un paraboloïde hyperbolique, connaissant les deux directrices.

Si le plan directeur était également donné, on chercherait son intersection avec les deux directrices, et à partir de ces points, on porterait des distances égales sur ces droites; en joignant les points de division, on aurait autant de génératrices de la surface.

§ 151. *Représentation de la même surface par la seconde* *génération ; traces de la surface.* — Le second plan directeur étant parallèle aux deux premières directrices a, $a'a''$, bc, $b'c'$, *fig.* 277, ce plan sera $D\,D'D''$. Pour trouver une génératrice quelconque de seconde génération, nous mènerons un plan qrs parallèle à $D\,D'D''$. Ce plan rencontrera deux génératrices quelconques de première génération de, $d'e'$, ff, $f'f'$, aux points x, x', y, y'. La droite xy, $x'y'$, qui joint ces points, est une génératrice de deuxième génération.

Un point quelconque de la surface étant donné en projection horizontale, x par exemple, on trouvera aisément son autre projection, et les deux génératrices qui passent par ce point.

On peut remarquer dans la *fig* 277, que toutes les génératrices de deuxième génération rencontrant celles de première, elles devront aussi rencontrer celle ag, g' qui est perpendiculaire au plan V. D'où il suit que toutes les projections verticales des génératrices de deuxième génération, doivent ici passer par le point g'.

L'intersection de la surface par le plan vertical de projection est la courbe MNP, QRS, elle s'obtient en cherchant la trace verticale de toutes les génératrices, tant de première que de deuxième génération. Cette courbe doit aussi passer par le point g', puisque ce point est la trace d'une génératrice. La trace horizontale de la surface est la génératrice am de première génération, comme nous l'avons déjà dit.

En exécutant les constructions, on voit que si l'on mène les deux génératrices de première génération hi, kl, l'une parallèle à lt, l'autre parallèle à bc, toutes les génératrices comprises dans l'angle hak donnent des points de la première branche MNP, et toutes celles comprises dans l'angle supplément kai, donnent des points de la deuxième branche QRS.

§ 152. *Plans tangents au paraboloïde hyperbolique.* — Le plan tangent à une surface étant déterminé par deux tangentes menées respectivement par le point de contact, à deux courbes tracées sur la surface, ces deux sections pouvant ici être les génératrices elles-mêmes qui passent par le point donné, on trouvera le plan tangent au point x, x' *fig.* 277, en faisant passer un plan $z z' z''$ par les deux génératrices $x f, x' f'$ et $x y, x' y'$.

Lorsqu'une droite rencontre trois génératrices du premier système, elle est elle-même une génératrice du second système et réciproquement. En effet, la droite $d d'$, *fig.* 278, n'est pas déterminée comme génératrice de deuxième génération par la condition de s'appuyer en d et d' sur deux génératrices de la première, il faut encore ajouter qu'elle sera parallèle au second plan directeur. Or, comme elle jouit de la propriété de rencontrer toutes les droites de première génération, en l'assujétissant à en rencontrer une troisième $a'' b''$, elle sera donc entièrement déterminée. On peut encore dire : le paraboloïde hyperbolique, comme toutes les surfaces de second degré, ne peut être rencontré par une droite en plus de deux points. Si donc une droite comme $d d'$ a trois points communs avec cette surface, elle y est toute entière contenue.

Il suit de là que *tout plan qui passe par une droite de la surface, est tangent à cette surface.* En effet ce plan rencontrera deux autres droites de la surface en deux points. Si l'on joint ces deux points par une droite, cette droite étant située dans le plan, rencontrera la première et s'appuiera par conséquent sur trois génératrices de la surface; donc elle sera elle-même une génératrice de l'autre génération. Le plan contiendra donc deux droites de la surface, et lui sera tangent au point où ces droites se couperont. Ainsi (*fig.* 278) le plan $a a'' b'' k''$ est tangent à la surface, car il passe par $a'' b''$, puis il coupe $a b$ et $a' b'$ en a et a'. Ces points joints entr'eux donnent la ligne $a a'$ qui rencontre $a'' b''$ en a''. Ce point est le point de contact du plan tangent qui contient les deux droites $a'' b''$ et $a a'$ de la surface.

Le plan $x y z$ (*fig.* 279) qui passe par la génératrice $d e$, $d' e'$ de première génération, est tangent à la surface. Il rencontre les deux génératrices $h m$ et $f o, f' o'$, l'une en h, l'autre en n, n'. Ces deux points donnent la génératrice de deuxième génération, qui coupe de, $d'e'$ au pointde contact t, t'.

En faisant tourner le plan xyz comme charnière autour de de,$d'e'$, il ne cesserait pas d'être tangent, mais son point de contact changerait; et serait toujours le point de rencontre de la génératrice de seconde génération qu'il contiendrait avec celle de première qu'il contient déjà. Lorsque le plan est parallèle à l'un des plans directeurs, il ne rencontre aucune autre génératrice; il n'en est pas moins tangent, mais son point de contact est situé à l'infini.

§ 153. *Sections planes du paraboloïde hyperbolique.* — Lorsqu'un plan quelconque coupe la surface dont il s'agit, il y a toujours sur la surface deux génératrices qui sont parallèles à ce plan, l'une de première, l'autre de seconde génération, à moins que le plan ne soit parallèle à l'intersection des deux plans directeurs, auquel cas les deux génératrices se réduisent à une seule parallèle au plan sécant et situé à l'infini. Les deux génératrices parallèles au plan coupant, dans le premier cas, sont respectivement parallèles aux intersections du plan coupant par les deux plans directeurs. Dans ce cas, comme la surface est du second degré, la courbe d'intersection qui a des points situés à l'infini, est donc une hyperbole, dont les asymptotes peuvent être déterminées. Quand une seule génératrice est parallèle au plan coupant, la section est une parabole.

Pour démontrer ce qui précède, prenons la *fig.* 280, dans laquelle, ab, $a'b'$ sont deux génératrices de première génération, servant de directrices à la seconde, et aa', bb' deux génératrices de la seconde génération, servant de directrices à la première. Les deux plans directeurs sont: mn parallèle à $a'b'$ et ab, et cbb' parallèle à aa' et bb'. Soit xyz un plan quelconque, qui coupe les deux plans directeurs suivant xy, yz. Il existe deux génératrices, l'une du premier système, parallèle à xy, l'autre du second, parallèle à yz. En effet, par la directrice aa', menons un plan parallèle à xy. Ce plan rencontrera la seconde directrice bb' en b''; et-si par ce point nous menons une parallèle à xy, cette droite sera comprise dans le plan $a\,b''$; elle rencontrera donc aa'. Alors elle s'appuiera sur aa' et bb', et comme elle est parallèle à xy et par suite au plan directeur mn, cette droite $a''b''$ est donc une génératrice de première génération.

De même, un plan mené par $a'\,b'$ parallèlement à yz, rencontre ab en un point d, et si par ce point on mène dd' parallèle à yz, cette droite rencontrera $a'\,b'$, puisqu'elles sont situées dans le même plan. Le plan dd' étant parallèle à yz, et par suite au plan directeur cbb' qui contient yz, cette droite est donc une génératrice de seconde génération.

Donc enfin il existe deux génératrices de la surface parallèle au plan coupant, l'une parallèle à l'intersection xy du plan coupant et du premier plan directeur, l'autre parallèle à l'intersection yz du plan coupant et de l'autre plan directeur. Le plan parallèle à mn, mené par $a''\,b''$, ne rencontrant aucune autre génératrice de la surface, lui est tangent en un point situé à l'infini § 151. Donc l'intersection de ce plan avec le plan coupant xyz doit donner la tangente au point de la courbe d'intersection situé à l'infini, c'est-à-dire une asymptote de la courbe. De même, le plan mené par dd' parallèlement à $c\,b\,b'$ serait tangent à la surface en un point infiniment éloigné, et l'intersection de ce plan avec xyz doit donner la seconde asymptote.

Lorsque le plan sécant tv est parallèle à l'intersection bc des deux plans directeurs, le plan $a'ag$ mené par aa' parallèlement à tp, se trouve parallèle à $c\,b\,b'$, et ne rencontre $b\,b'$ qu'à l'infini. Il en est de même du plan $b'\,a'\,g'$. Les deux lignes de la surface, parallèles au plan coupant, et respectivement parallèles, l'une à tp et l'autre à vq, ou toutes deux à bc, se réduisent donc à une seule parallèle à bc, et située à l'infini. Le plan tangent mené par cette droite serait parallèle au plan coupant; par conséquent, la courbe n'a pas d'asymptote et c'est une parabole.

Nous pouvons réaliser en *Géométrie descriptive*, *fig.* 281, tout ce que nous venons de dire sur la figure en relief 280. a, $a'd'$ et $b\,b'$, $b\,b'$ sont les premières directrices, génératrices de seconde génération. ab et $a'\,b'$, $a'\,b'$ sont les directrices du second système, génératrices du premier. Le plan coupant xyz rencontre le premier plan directeur, le plan H, suivant xy et le deuxième plan directeur xok suivant xo, $x'o'$. L'une des droites parallèles au plan coupant sera donc parallèle à xy et l'autre à xo, $x'o'$, ainsi que les asymptotes. Le plan mené par a, $a'd'$, parallèlement à xy coupe bb' en b''. Donc $a''b''$ menée parallèlement à xy doit rencontrer a, $a'\,d'$, et c'est la génératrice de première génération parallèle au plan coupant. De même, le plan fqh, mené par la droite $a'\,b'$ parallèlement à xo, $x'o'$ rencontre ab en d. La parallèle menée par ce point à xo, $x'o'$ rencontre $a'\,b'$, et cette droite est la génératrice de seconde génération qui est parallèle au plan coupant. Elle peut être trouvée ici plus simplement en remarquant que le point a, d' appartient à toutes les projections verticales des génératrices du deuxième système. Le plan tangent $a''\,b''$, parallèle au premier plan directeur, coupe le plan xyz de la courbe suivant la droite A S, AS, qui est une asymptote. Le plan tangent $d'\,dk'$ mené par dd' parallèlement au deuxième plan directeur xok coupe xyz suivant la seconde asymptote A' S', A' S'.

On déterminera des points de la courbe d'intersection en cherchant l'intersection des génératrices par le plan coupant.

Le plan coupant tpv, *fig.* 282, parallèle à l'intersection bc des deux plans directeurs, coupe la surface suivant une parabole dont on trouvera les points comme ceux de l'hyperbole.

Comme exemples, nous construirons les *fig.* 283 et 284 qui sont les coupes d'un paraboloïde par des plans parallèles et équidistants, donnant des hyperboles, et des plans parallèles donnant des paraboles.

§ 154. *Intersection d'un paraboloïde hyperbolique par une surface cylindrique.* — Soit a, $a'\,a''$ *fig.* 285, l'une des directrices de la surface gauche et l'axe de la surface cylindrique droite. Soit bc, $b'\,c'$, la seconde directrice. Pour trouve des points de la courbe d'intersection, nous prendrons un plan horizontal quelconque $d'e'$ qui coupe le cylindre suivant un cercle, et la surface gauche suivant une génératrice $de, d'e'$; cette droite rencontre la section du cylindre en deux points x, x', et y, y' qui sont des points de la courbe d'intersection des deux surfaces.

En employant les génératrices du second système, on trouvera également autant de points qu'on voudra de la courbe cherchée. Soit $fg, f'g'$ l'une de ces génératrices, elle rencontre le cylindre en v, v', et u, u', qui sont également des points de la courbe.

En menant les deux diamètres rectangulaires hi, kl de la base du cylindre, et déterminant les points de la courbe qui sont situés sur ces génératrices, on trouve les points, h', i', k', pour lesquels les projections verticales des génératrices du cylindre sont des tangentes. Les deux branches de la courbe sont tangentes en k'. Il est visible, en effet, que ces droites sont les intersections des plans tangents aux deux surfaces.

La parallèle mn à bc, menée par le centre a, donne deux points de la courbe situés à l'infini sur les génératrices m et n du cylindre, dont les projections sont des asymptotes de la courbe d'intersection; en effet, les intersections des plans tangents aux deux surfaces, sont ces génératrices elles-mêmes.

La *fig.* 286 offre un autre exemple dans lequel le cylindre a une position différente.

§ 155. *Sur quelques intersections de surfaces usitées dans les arts, dénominations qu'on leur donne.* — Nous terminerons la *Géométrie descriptive* par la définition de quelques termes employés dans les arts de construction, et qui se rapportent à des intersections de surfaces que les élèves pourront toujours exécuter à l'aide des notions développées dans ce cours.

On appelle *berceau*, un demi-cylindre horizontal et creux, tel que $abcd$, $a'b'c'd'e'f'$ *fig.* 287. Les murs ac, $a''c''$, bd,

$b''d''$ qui soutiennent le berceau, se nomment *piédroits*. Le demi-cercle ab qui sert de directrice au cylindre, se nomme *cintre*; le plan $a'b'$, *plan de naissance*.

Le berceau est *droit*, lorsque le plan d'entrée ab est vertical, et perpendiculaire à l'axe; il est *biais* lorsque le plan d'entrée bg est vertical et oblique à l'axe. Enfin, il est *en talus* lorsque le plan d'entrée n'est pas vertical. Le berceau est en *plein-cintre*, lorsque le cintre est un cercle; *surhaussé* lorsque le diamètre vertical est plus grand que le diamètre horizontal et *surbaissé* dans le cas contraire. Il est en *ogive*, lorsqu'il est surhaussé et formé de deux arcs de cercle décrits des points a et b comme centre, avec ab pour rayon *fig.* 288.

On appelle *voûte d'arête*, la rencontre de deux berceaux qui se traversent, ayant des cintres égaux et même plan de naissance.

La voûte d'arête est *droite* lorsque les axes des berceaux sont perpendiculaires l'un à l'autre *fig.* 289. Elle est *biaise* lorsque les berceaux se rencontrent obliquement *fig.* 290, et enfin elle est *barlongue*, lorsque les berceaux n'ont pas la même largeur *fig.* 291.

La voûte en arc de cloître est celle qui est formée de deux berceaux de même cintre et de même plan de naissance, et qui se rencontrent sans se pénétrer *fig.* 292.

On appelle *lunette*, la rencontre de deux berceaux qui ont des hauteurs différentes et même plan de naissance, ou qui n'ont ni même plan de naissance ni même hauteur.

La lunette est *droite* ou *biaise* selon que les axes des berceaux sont perpendiculaires l'un à l'autre ou inclinés *fig.* 293 et 294.

On appelle *descente*, un demi-cylindre incliné et creux formant une voûte. La descente peut être droite ou biaise. La *fig.* 295 offre une descente droite rencontrant un berceau cylindrique.

On appelle *tour ronde*, un cylindre vertical et creux.

La *porte en tour ronde* est la rencontre d'une tour ronde avec un berceau horizontal. Si l'axe du berceau rencontre l'axe de la tour, la porte est *droite*; s'il ne le rencontre pas, elle est biaise. La *fig* 296 présente une *porte droite en tour ronde*, et la *fig*. 297 une *porte biaise en tour ronde*.

La *descente en tour ronde* est la rencontre d'une descente avec la tour, elle peut être droite ou biaise.

Une *tour ronde en talus* est un cône droit et creux.

La *porte droite en tour ronde et en talus* est la rencontre d'un berceau dont l'axe coupe l'axe du cône, *fig*. 298. Elle peut être biaise.

On appelle *dôme*, une voûte sphérique; la *fig*. 299 offre une *porte droite* dans un dôme. C'est la rencontre de ce dôme et d'un berceau.

On appelle *arrière-voussure* une surface réglée engendrée par une droite assujétie à glisser sur une horizontale $h\,o$ *fig*. 300 et sur deux arcs de cercle verticaux $a\,b$ et $c\,d$ parallèles et perpendiculaires au plan H. Cette surface forme une voûte employée dans les arts de construction.

Pour en tracer une génératrice, par la droite $h\,o$ menons un plan $h\,v\,k'$ qui coupe les deux arcs en k' et g' qui se projettent en k et g; la ligne $k\,g$ est la projection horizontale d'une génératrice de la surface qui s'appuie en m,v sur $h\,o,v$ et dont la projection verticale est $k'\,g'$.

Après avoir construit un assez grand nombre de génératrices, on trouvera aisément l'intersection de cette surface, par un plan vertical tel que $p\,q$.

L'*arrière-voussure de Marseille* est une porte, qui se compose d'une porte droite pratiquée dans l'épaisseur d'un mur droit, et d'une petite voûte ou *voussure*, destinée à couvrir l'évasement de cette porte. On en voit les projections dans la *fig*. 301.

PRINCIPES SUR LES OMBRES.

§ 156. *Définitions*. — Les corps de la nature se partagent en deux classes, sous le point de vue de leur mode de transmission de la lumière. On distingue les corps *lumineux par eux-mêmes*, et les corps *éclairés*, ou visibles par réflexion. Les premiers sont ceux, tels que le soleil, les étoiles, les corps incandescents, d'où l'on suppose que le fluide lumineux s'échappe pour se communiquer aux appareils destinés à le recevoir directement, ou par réflexion; les seconds sont ceux qui ne sont visibles que parce qu'ils reçoivent la lumière de l'un des premiers, et la transmettent à l'aide de leur surface, tels sont : les planètes, la terre elle-même et tous les corps qui la recouvrent.

La lumière la plus usuelle nous venant du soleil, ses rayons peuvent être supposés venir d'un point lumineux infiniment éloigné : alors ils peuvent être considérés comme parallèles.

Cela posé, si l'on imagine qu'un rayon de lumière L suive tous les contours d'un corps A, *fig.* 302, il engendrera une surface cylindrique enveloppe de ce corps, et la ligne de contact des deux surfaces séparera évidemment la partie du corps A, qui reçoit l'action du rayon lumineux, de celle qui ne la reçoit pas. Cette courbe de contact, est la *ligne de séparation d'ombre et de lumière* sur le corps A. La partie de la surface cylindrique enveloppe qui est privée de lumière, et située au-delà du corps A par rapport au corps lumineux, s'appelle l'*ombre* du corps A. L'*ombre portée* par le corps A sur un corps B immergé en partie dans le cylindre d'ombre, n'est autre chose que la figure obtenue par l'intersection des deux corps A et B. C'est la partie de la surface du corps B, privée de lumière par l'interposition du corps A entre B et le corps lumineux.

§ 157. *Deux problèmes généraux à résoudre sur les ombres.* — Les questions qu'on peut se proposer sur les ombres peuvent se réduire à deux : 1° déterminer la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un corps donné; 2° trouver l'ombre portée par ce premier corps sur un autre quelconque.

Le premier problème peut se résoudre d'une manière générale, en faisant dans le corps des sections parallèles au rayon lumineux et menant des tangentes aux courbes, parallèlement à ce rayon. Les points de contact appartiendront à la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

Le second problème se résoudra en construisant la surface cylindrique dont la directrice est la ligne de séparation d'ombre et de lumière et dont la génératrice est le rayon lumineux, et en cherchant l'intersection de cette surface par une autre sur laquelle l'ombre sera portée.

Ces solutions générales sont susceptibles de nombreuses modifications, eu égard à la forme des corps éclairés, et à celle des corps sur lesquels se forme l'ombre. Nous en donnerons quelques exemples, et nous renverrons pour le reste à l'ouvrage de M. Similien, ainsi que pour la détermination des ombres en projection oblique.

§ 158. *Des ombres sur les polyèdres.* — Il existe une différence bien marquée entre les questions sur les polyèdres, et celles qui se rapportent aux surfaces courbes, sous le point de vue des ombres propres et portées. En effet, dès qu'un point d'une face d'un polyèdre est éclairé, on peut en conclure que la face entière est éclairée. Et de même, si ce point est dans l'ombre, la face à laquelle il appartient est entièrement dans l'ombre. Il résulte de là que la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un polyèdre ne peut être qu'une série d'arêtes. Il reste à déterminer quelles sont les arêtes qui la composent.

Pour y parvenir nous remarquerons que si l'on mène par une arête quelconque un plan parallèle au rayon lumineux, et si ce plan entre dans l'angle formé par les faces dont cette arête est l'intersection, ces deux faces seront ou toutes deux éclairées ou toutes deux dans l'ombre, comme le fait comprendre immédiatement la *fig.* 303; donc cette arête ne fera pas partie de la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Si au contraire, le plan parallèle à la lumière, laisse d'un même côté les deux faces dont l'arête est l'intersection, alors les rayons lumineux interceptés par la première face *a b*, *fig*. 304, ne pourront éclairer la seconde face *a c*. Donc l'arête *a* fera partie de la ligne de séparation d'ombre et de lumière.

La Géométrie descriptive offre un moyen bien simple de reconnaître si le plan mené parallèlement à la lumière, entre ou n'entre pas dans l'angle formé par deux faces. On détermine la trace de l'arête dont ces deux faces sont l'intersection, et les traces de ces deux faces. Menant ensuite par l'arête un plan parallèle au rayon lumineux, si la trace de ce plan entre dans l'angle formé par les traces des faces, l'arête n'est pas ligne de séparation d'ombre et de lumière. Elle en fait partie au contraire, si elle laisse les traces des faces d'un même côté.

§ 159. *Ombre d'un prisme.* — On peut appliquer ce qui vient d'être dit à l'ombre d'un prisme donné par ses projections orthogonales.

Soit *a b c d e f g h i k*, *a' b' c'*...... le prisme donné, *fig*. 305. Soit L, L' le rayon lumineux, les deux faces *d k*, *d h* se coupent suivant l'arête *d i*, les traces de ces deux faces sont : *p q*, *p r*, se coupant en *p* trace de l'arête *d i*, le plan parallèle à L L', mené par *d i*, *d' i'*, a pour trace horizontale *s p t*. Cette ligne laissant les traces *p q*, *p r*, d'un même côté, fait partie de la ligne de séparation d'ombre et de lumière. Au contraire, les deux faces *d h*, *dg*, ont pour traces, *p'q'*, *p'r*; le plan parallèle à L L', mené par l'arête *c h*, a pour trace *s' p' t'*, qui entre dans l'angle *q' p' r'* ; donc cette arête *ch*, *c'h'*, n'est pas une ligne de séparation d'ombre et de lumière. En continuant ainsi, la base inférieure étant dans l'ombre et la base supérieure éclairée, on trouverait que la ligne de de séparation d'ombre et de lumière se compose ici des arêtes *d i*, *d e*, *e a*, *a b*, *b g*, *g h*, *h i*, ce qui forme le contour *i d e a b g h i*.

Si maintenant on veut trouver l'ombre portée par ce prisme sur d'autres corps, il faut mener des rayons lumineux par tous les points de la ligne de séparation d'ombre et de lumière, et chercher l'intersection de ces rayons avec les corps donnés. Or, tous les rayons lumineux, menés par tous les points d'une même arête, sont compris dans un même plan parallèle à ce rayon, donc, pour avoir l'ombre portée par une arête, il suffira de mener par cette arête un plan parallèle à la direction de la lumière, et de chercher son intersection avec les corps sur lesquels se porte l'ombre. Cette ombre portée sera limitée par les deux rayons menés par les deux extrémités de l'arête.

Par exemple, si l'on veut avoir l'ombre portée par le prisme précédent sur le plan H, nous mènerons par une des arêtes di, $d'i'$, de séparation d'ombre et de lumière, le plan spt parallèle à la lumière; cette trace indéfinie contiendra l'ombre portée. Pour la limiter, il suffit de chercher l'ombre du point, d, d' et celle du point i, i', ce qui se fait en menant des rayons lumineux par ces points; ils percent le plan H, l'un en d'', l'autre en i''. En procédant ainsi pour les autres arêtes de séparation d'ombre et de lumière, on obtient enfin l'ombre portée sur le plan H, $i''d''e''a''b''g''h''i''$, par la figure $ideabghi$.

Pour trouver l'ombre portée par ce prisme sur un autre corps, un autre prisme, par exemple, on chercherait l'intersection des plans tels que spt, avec le second prisme en ayant soin de limiter ces intersections aux points où les parallèles au rayon lumineux menées par les extrémités de chaque arête, rencontrent la surface de l'autre prisme. C'est ce qui est exécuté sur la *fig.* 306.

On trouvera pour exercice, *fig.* 307, l'ombre d'une auge de meule.

§ 160. *Ombres d'un cylindre.* — Soit $abcdefgh$, $a'e'g'c'$ les projections d'un cylindre droit, *fig.* 308. Soit L L' le rayon lumineux.

La ligne de séparation d'ombre et de lumière, sur la surface sera composée de deux génératrices. Celles suivant lesquelles deux plans tangents parallèles à la lumière, touchent le cylindre. Pour obtenir ces plans, nous mènerons un plan ikl parallèle au rayon lumineux, et à la génératrice du cylindre. Ce plan rencontre le plan $a'c'm$ de la base du cylindre suivant une droite np, $a'c'$. Menant à la base $abcd$, $a'c'$ deux tangentes parallèles à cette ligne, ces tangentes seront comprises dans les plans tangents cherchés. Donc les génératrices de contact sont les droites oq, $o'q'$, rs, $r's'$.

Il reste à savoir si c'est l'arc $obcr$ ou l'arc $oadr$ qui est la ligne de séparation sur la base. Pour cela, il suffit de chercher si la base $abcd$ est ou non éclairée. Or, si par un point a de la base $abcd$ et de la partie éclairée de la surface, nous menons un plan parallèle au rayon lumineux et à la génératrice, ce plan rencontrera le cylindre suivant une génératrice et la base suivant une droite. Ces deux droites se coupent au point a, et si par ce point on mène un rayon lumineux, suivant que ce rayon entrera dans l'angle des deux droites ou les laissera d'un même côté, la ligne de la base sera éclairée ou dans l'ombre. Donc la base elle-même sera éclairée ou dans l'ombre. Ici cette base est éclairée; c'est donc $obcr$ qui est la ligne de séparation d'ombre et de lumière, ainsi que sa symétrique opposée $qehs$; donc la ligne totale de séparation est la figure $obcrsheqo$.

L'ombre propre, comme la ligne de séparation d'ombre et de lumière, se composera de deux parties, l'espace renfermé entre les deux plans tangents suivant oq, rs, et les surfaces cylindriques dont $obcr$ et $qehs$ sont les directrices, et LL' la génératrice. Les plans tangents ont pour traces horizontales tu, vx. L'ombre portée des points o, o', r, r', q, q', s, s', sur les plans de projection sont o'', r'', $q''s''$. Construisant enfin la surface cylindrique dont $obcr$ et $qehs$ sont les directrices et LL' la génératrice, nous achèverons l'ombre portée par le cylindre sur les plans de projection et nous aurons la figure $o''b''c''r''s''h''e''q''o''$.

Les mêmes plans tangents et les mêmes surfaces cylindriques $obcr$ et $qehs$ serviront à trouver l'ombre portée par le cylindre sur une autre surface quelconque, comme un cylindre, un cône, une sphère, en cherchant les intersections de ces plans et de ces surfaces cylindriques, par ce cylindre, ce cône, cette sphère.....

§ 161. *Ombres d'une sphère.* — En faisant glisser un rayon lumineux tangentiellement à une sphère, il engendrera une surface cylindrique droite, à base circulaire, enveloppe de la sphère, et la touchant suivant un grand cercle, dont le plan sera perpendiculaire au rayon lumineux. En effet, si *a b*, *fig.* 309, est un rayon lumineux tangent à l'un des grands cercles de la sphère au point *d*, en faisant tourner *a b* et le grand cercle autour de *mn* parallèle à *a b*, le grand cercle engendrera la sphère, et la ligne *a b* engendrera un cylindre droit enveloppe, dont le grand cercle *d e* perpendiculaire à *a b* sera la courbe de contact avec la sphère.

Soit donc *c*, *c'*, le centre de la sphère, *fig.* 310. La ligne de séparation d'ombre et de lumière étant le grand cercle de la sphère dont le plan est perpendiculaire au rayon lumineux *c l*, *c' l'*, pour trouver ses projections, il suffit de chercher les axes des deux ellipses suivant lesquelles il se projette. Occupons-nous d'abord de l'ellipse, projection horizontale. Elle a pour grand axe le diamètre horizontal du grand cercle. Or, comme *c l*, *c' l'*, est perpendiculaire à ce grand cercle, et par suite à tous ses diamètres, celui que nous considérons étant horizontal, sa projection horizontale *de* sera perpendiculaire à *c l*, § 51, *fig.* 82, et § 76, *fig.* 133. Le petit axe sera dirigé sur *c l*, et pour avoir sa grandeur, il faut projeter horizontalement le diamètre du grand cercle qui est perpendiculaire au diamètre horizontal. Le plan vertical *c l* de ce diamètre se rabattant sur le plan H, le rayon lumineux *c l*, *c' l'*, se rabat en *c'' l*, et le diamètre cherché en *f'' g''* perpendiculaire à *c'' l*, faisant *f'' g''* = *d e* et projetant *f''* et *g''* en *f* et *g*, *fg* sera le petit axe de l'ellipse.

Le grand axe et le petit axe de l'ellipse de la projection verticale se trouvent exactement de la même manière, avec les éléments de la projection verticale, et l'on obtient *m n*, *op* pour ces deux axes.

Les points f, f' g, g', sont les points le plus haut et le plus bas de la courbe, ou ceux pour lesquels la tangente est horizontale. Les tangentes en f', g', sont donc parallèles à lt. De même, les points o, o', p, p', sont les plus éloignés du plan V, et les projections horizontales des tangentes en ces points sont parallèles à lt.

La ligne de séparation d'ombre et de lumière étant déterminée, nous prendrons cette ligne pour directrice d'un cylindre dont le rayon lumineux sera la génératrice, et nous aurons l'ombre de la sphère. Son intersection avec les corps qu'il peut rencontrer donnera l'ombre portée de la sphère sur ces corps.

Si nous voulons ici trouver l'ombre portée sur les plans de projection, nous remarquerons que le cylindre d'ombre étant un cylindre droit à base circulaire, le plan H ou le plan V le coupe suivant une ellipse (90), dont le grand axe est l'intersection d'un plan passant par l'axe, et perpendiculaire au plan coupant. Ce plan est le plan cl, le grand axe est donc cl, dont on obtiendra les extrémités, en cherchant l'ombre portée par les points f, f', g, g'. On obtient les points f'', g''. Le petit axe est donné par l'ombre du diamètre de, $d'e'$ en $d''e'' = de$. Les axes de l'ombre sur le plan V s'obtiendront de la même manière : l'ombre de op, $o'p'$ en $o''p''$ donnera le grand axe, et l'ombre de mn, $m'n'$ en $m''n''$, donnera le petit axe. Ces deux courbes se rencontrent ici sur lt en q et r. Ces points peuvent être obtenus directement en menant par lt un plan parallèle au rayon lumineux qui coupera le cercle de séparation d'ombre et de lumière en deux points; par ces deux points, on mènera deux parallèles au rayon lumineux qui rencontrent lt aux points cherchés q et r.

L'ombre de la sphère se porte donc ici sur les plan H et V, et elle y forme la figure $qf''e''ro''q$.

§ 162. *Ombres d'une niche sphérique.* — Soit a, a' le centre de la sphère, *fig.* 311, placé sur l'axe du cylindre. Soit l, l' le rayon lumineux. La ligne de séparation d'ombre et de lumière se composera de la génératrice $b, b'b''$, et d'une portion du demi-cercle $b'' c'' d''$. L'ombre se portera en partie sur le plan H, en partie sur le cylindre, et en partie sur la sphère. Le plan vertical bf mené par la génératrice b, a pour trace bf, ombre portée sur le plan H. Ce plan coupe le cylindre suivant la génératrice $f, f'f''$, qui est l'ombre portée par b sur le cylindre. La limite f'' de cette ombre s'obtient en menant un rayon lumineux par le point b, b''. L'ombre portée par un point gg' du cercle $b'' c'' d''$ sur le cylindre s'obtiendra en menant par ce point un rayon lumineux $gk, g'k''$, qui rencontrera le cylindre en k, k'', point de la courbe d'ombre portée.

Pour trouver l'ombre portée par ce même cercle sur la sphère, nous ferons remarquer que le cylindre d'ombre dont le rayon lumineux est la génératrice, entrant dans la sphère par un grand cercle $b'' c'' d''$, doit également en sortir par un grand cercle.

En effet, *fig.* 312, le plan vertical étant supposé passer par le rayon lumineux ac, si o est le centre de la sphère, on voit que le cylindre dont ac est la génératrice et go l'axe, entrant dans la sphère par le grand cercle fb, en sort par le grand cercle ce. Ces deux cercles se coupent suivant un diamètre o, aux extrémités duquel les génératrices sont tangentes à la sphère.

Maintenant, revenant à la *fig.* 311, il est aisé de voir que les tangentes à la sphère, parallèles au rayon lumineux, la touchent aux points m', n', et que la ligne $m'n'$ est alors l'intersection du grand cercle $b'' c'' d''$ et de son ombre portée sur la sphère; $m'n'$ est donc le grand axe de l'ellipse. Le diamètre qui donnera le petit axe sera perpendiculaire à $m'n'$: il est situé dans le plan $l'a'$ perpendiculaire au plan V. Pour le trouver, il suffit de chercher l'ombre du point g, g' sur la sphère. Or, le rayon lumineux $gk, g'k''$, prend la position $g'q'$ telle que $a'q' = aq$, quand on fait tourner le plan du grand cercle $l'a'$, et qu'on le rabat sur le plan V. Donc le point p est celui où le rayon $g'q'$ rencontre la sphère. Ce point se relève en p' qui donne $a'p'$ pour le petit axe de l'ellipse.

L'ellipse et la courbe d'ombre sur le cylindre se raccordent au point t d'intersection du grand cercle horizontal $b''d''$ et du cercle d'ombre portée. On peut obtenir ce point directement, en remarquant que $b''d''$ est la projection du grand cercle horizontal, et que $a'p$ est celle du cercle d'ombre portée sur le plan $l'a'$ rabattu. $b''d''$ et $a'p$ sont donc les projections de leur intersection. Rabattant le cercle $b''d''$ sur le plan V, un point x, x' de cette intersection se rabat en x'' tel que $xx'' = rx'$, et l'intersection se rabat en $a'x''$. Le point t' est le point cherché, il se projette en t.

§ 163. *Ombres d'une vis quadrangulaire.* — Soient l, l' les projections du rayon lumineux, *fig.* 313, et c, $c'c''$ celles de l'axe d'une vis quadrangulaire. La ligne de séparation d'ombre et de lumière se composera, pour un filet, du bord ad de ce filet et d'une génératrice de; pour le noyau, d'une génératrice mn. Pour avoir l'ombre portée par le bord ad sur le noyau, nous mènerons par un point f, f' de ce bord, un rayon lumineux, qui rencontrera le noyau au point g, g' de cette ombre portée. Si l'ombre se porte sur le filet lui-même, pour trouver cette ombre, il faudra chercher l'intersection du cylindre d'ombre dont ad est la directrice, par la surface du filet. Pour y parvenir, nous imaginerons un plan vertical hk, parallèle à la lumière, et qui coupera la surface supérieure du filet suivant une courbe, qu'on obtiendra en traçant les hélices décrites sur des cylindres différents ci, cp... et cherchant les intersections h, k.... de ce plan avec ces hélices. L'ombre r, r' du point q, q' sur cette courbe, donnera un des points de l'ombre portée par le bord ad sur la surface supérieure du filet. Les projections de cette ombre sont rz, $r'z'$.

Si l'ombre renferme le point n, il n'y aura pas d'ombre portée par le noyau sur le filet. Si elle ne le renferme pas, on cherchera l'ombre portée par le noyau sur le filet, en menant le plan tangent suivant mn, et cherchant son intersection par la surface du filet. Cette intersection peut se trouver en déterminant l'intersection des génératrices de la surface, par ce plan xy tangent suivant mn. On obtient ainsi la courbe xy, $nx'y'$, cachée, ou vue, suivant qu'elle est, ou qu'elle n'est pas dans l'ombre.

§ 164. *Ombres d'une vis triangulaire.* —Pour trouver l'ombre de la vis triangulaire, nous emploierons un procédé analogue à celui qui a servi à déterminer l'ombre $r'z'$ dans le paragraphe précédent; nous mènerons, par un point q,q' du bord ad, *fig.* 314, un plan qr parallèle au rayon lumineux. Ce plan coupe les hélices tracées sur les cylindres cp, ci.... suivant les points h, h', k, k',... ce qui forme la courbe hk... $h'k'$... Le rayon lumineux mené par le point q,q', rencontre cette même courbe au point r,r' qui est un des points de l'ombre portée par ad sur le filet. On obtient ainsi la courbe rst, $r's't'$.

PRINCIPES DE CHARPENTE.

ASSEMBLAGES.

§ 165. *Définitions.* — *La charpenterie* est l'art de construire les édifices avec des pièces de bois. Ces pièces forment un réseau dont la légèreté n'exclut pas la solidité; et donnent le moyen de diminuer la maçonnerie, mode de construction toujours plus dispendieux.

Les pièces de bois qui composent une charpente quelconque, doivent être réunies entr'elles de la manière la plus propre à assurer la stabilité du système, tout en opérant la décomposition la plus convenable, des forces qui réagissent sur ce système.

On nomme *assemblages* les parties saillantes et creuses des pièces de bois, qui se réunissent ou s'arc-boutent, et qui sont destinées à assurer le contact de ces pièces.

Un premier principe presque général de charpente, consiste à n'employer que des pièces équarries.

Lorsque deux pièces de bois se rencontrent, les axes de ces deux pièces doivent être placés dans un même plan, car sans cela l'une d'elles solliciterait l'autre à tourner autour de son axe.

Les faces parallèles au plan des axes portent le nom de *faces de parement*, et les autres *faces d'assemblage*.

On peut diviser les assemblages en deux classes : les assemblages par *tenon* et *mortaise*, et les assemblages par *moises* ; ils dérivent tous plus ou moins de ces deux modes que nous allons définir.

L'assemblage à tenon et *mortaise* est celui dans lequel le bout de l'une des pièces est façonné en polyèdre d'une forme donnée, et l'extrémité de l'autre creusée en polyèdre d'une forme parfaitement égale.

L'assemblage par moises est celui dans lequel une ou plusieurs pièces sont saisies par deux autres pièces dont les plans sont parallèles, et qui portent le nom de *moises*.

§ 166. *Assemblage par tenon et mortaise.* — Cet assemblage, dans toute sa simplicité, est représenté, *fig.* 315, il est destiné à réunir deux pièces qui doivent faire entr'elles un angle droit. Le *tenon* est le parallélipipède en relief *abcd*, taillé à l'extrémité de la pièce A. La *mortaise* est le parallélipipède creux *a' b' c' d'*, pratiqué dans la pièce B : ces deux parallélipipèdes ont la même forme et les mêmes dimensions. Les parties *de*, *cf*, se nomment l'*about* du tenon. La surface semblable *d' e'*, *c' f'*, que cette partie recouvre sur la pièce B, se nomme *portée de l'about*. Les faces *ad*, *bc* sont les *joues* du tenon, et les faces correspondantes sur la pièce B, les *joues* de la mortaise ; les épaisseurs du bois *d' e'*, *c' f'* se nomment *jouées* de la mortaise.

L'effort auquel les pièces doivent résister, étant le même pour le tenon et les jouées, ces dernières doivent être égales à l'épaisseur du tenon. D'où il suit que pour obtenir la mortaise il faut diviser l'épaisseur *e' f'* en trois parties égales.

On unit les deux pièces à l'aide d'une cheville, mais cette dernière ne doit point être considérée comme nécessaire, parce qu'une charpente doit suffire à toutes les conditions de solidité et d'équilibre par le secours seul de ses assemblages.

Lorsque deux pièces doivent s'assembler obliquement, *fig.* 316, on tronque la partie antérieure du tenon par un plan ab perpendiculaire au plan des axes et à la face df de la pièce B. Il est d'ailleurs également coupé comme le précédent, par un plan bc parallèle à la même face df. L'about du tenon est ici la face ab et sa portée est $a'b'$. Cette forme du tenon a pour but de permettre l'introduction de la pièce A dans la pièce B perpendiculairement à la face df, et de donner à la portée une résistance plus grande.

Toutefois, les inconvénients de cet assemblage ne sont pas tous évités. Les fibres du bois en ab, étant coupées obliquement, et celles en $a'b'$ perpendiculairement aux fibres, elles ne sauraient résister également à une pression un peu grande et les premières pourraient être détruites. Il se forme alors des déchirures à la racine a du tenon où l'angle x est fort aigu. Pour éviter cet accident, quand la pression est trop grande, on *embrève* les pièces A et B.

Un *embrèvement* est une entaille $a'g'h'$, *fig.* 317, faite dans la pièce B, sur la jouée de la mortaise, dans la direction de $a'b'$ et telle que $a'g'$ = un quart de $a'b'$. Le tenon prend alors la forme $cbgh$, et l'angle agh étant à peu près droit, cette disposition corrige le défaut précédemment indiqué par la petitesse de l'angle x. L'assemblage devient la *fig.* $a''g''h''c''b''$.

Les assemblages que nous venons de décrire sont employés lorsque la pression transmise par la pièce A tend à la rapprocher de la pièce B.

§ 167. *Assemblage à queue d'hironde. Trait de Jupiter.* — Lorsque l'assemblage doit résister à un effort de traction dans le sens de la longueur de la pièce assemblée, on emploie alors un assemblage *à queue d'hironde*, dans lequel le tenon entre dans la mortaise par l'une des faces de parement de la pièce B. Cet assemblage est représenté *fig.* 318, l'épaisseur ab de la queue d'hironde est la moitié de celle de la pièce A, et elle se loge en entier dans la pièce B, $cd = \frac{3}{5} ef$, et $gh = ef$.

La queue d'hironde est à *recouvrement* lorsqu'elle n'occupe, *fig.* 319, que la moitié de la pièce A, et qu'elle est entièrement logée dans la pièce B.

Les queues d'hironde sont encore en usage dans les assemblages d'angle, *fig.* 320.

Pour résister à un effort de traction, on emploie encore le *trait de Jupiter.* Il est représenté *fig.* 321. Cet assemblage est destiné à réunir deux pièces dans la direction de leurs longueurs. Sa solidité dépend de la résistance que la cohésion des fibres oppose à l'effort qui tend à séparer les pièces.

Pour augmenter cette résistance, on multiplie le nombre des entailles *e*, mais au-delà de trois ou quatre, on augmente la difficulté de la coupe sans accroître la solidité, parce que les entailles n'ont plus assez de profondeur pour être solides.

§ 168. *Assemblages des pièces croisées.* — Pour fixer deux pièces A et B, à angle droit, *fig.* 322, on emploie l'assemblage croisé *à tiers de bois* dans lequel les deux pièces sont entaillées chacune au tiers de son épaisseur, et sur une longueur égale à la largeur de l'autre pièce.

L'assemblage à *mi-bois* est celui, *fig.* 323, dans lequel chaque pièce est entaillée de la moitié de son épaisseur, de sorte que lorsqu'elles sont assemblées, leurs surfaces de parement s'affleurent des deux côtés. On maintient les assemblages au moyen d'un boulon.

Cet assemblage porte plus particulièrement le nom de *croix de Saint-André*, lorsque les pièces A et B se croisent sous un angle quelconque, il est représenté *fig.* 324, et projeté sur chaque face d'assemblage.

Lorsque l'angle de croisement des pièces est trop aigu, pour empêcher qu'il ne se lève des éclats aux bords aigus des entailles, on embrève les pièces A et B, ce qui fournit la *fig.* 325, dans laquelle l'assemblage est projeté sur les faces d'assemblage.

§ 169. *Assemblage par moises.* — Comme nous l'avons vu § 164, les moises sont des pièces *jumelles* qui embrassent d'autres pièces, le plus souvent en les croisant pour les lier entre elles. Elles ont, sur les assemblages précédemment étudiés, l'avantage d'éviter en partie le creusement trop considérable des mortaises, et par suite l'affaiblissement des pièces.

La plus simple des dispositions à adopter pour moiser des pièces est représentée *fig.* 326, où la position des pièces moisées est variable par rapport aux moises. Les moises peuvent être plus ou moins entaillées, ainsi que les pièces moisées, afin que les premières ne puissent pas glisser.

La pièce A est moisée sans entailles faites dans cette pièce elle-même. La pièce B est entaillée, la pièce C est assemblée à recouvrement, § 166, la pièce D est moisée par l'angle.

Les moises sont ordinairement retenues par des boulons à vis et des écrous.

DES COMBLES.

§ 170. *Pans de bois, combles, fermes.* — Nous ferons une application de quelques-uns des assemblages précédents à la charpente d'un comble.

On nomme *pan de bois* un assemblage de pièces de bois dont le nombre et le mode d'assemblage sont relatifs à la solidité que doit avoir la construction à laquelle il doit être employé.

Les pans de bois horizontaux sont les *planchers*, les pans de bois verticaux forment des *murs* ou des *cloisons*, et les pans de bois inclinés composent les *combles*. Ces derniers sont destinés à porter les couvertures des bâtiments.

Un des éléments principaux de la charpente d'un comble, est ce qu'on nomme une *ferme* : c'est un chevalet triangulaire dont le plan est vertical, et qui se répète de distance en distance sur toute la longueur du bâtiment; il s'appuie sur les murs de l'édifice, et reçoit le poids du reste de la charpente, et celui de la couverture.

Les fermes doivent donc être disposées d'après les conditions les plus avantageuses pour assurer leur invariabilité et leur plus grande résistance possible, eu égard à la charge qu'elles doivent supporter.

Les fermes peuvent être très variées de forme, comme les combles auxquels elles se rattachent. Nous choisirons pour exemple les *combles à deux égouts*.

§ 171. *Comble à deux égouts.* — On appelle ainsi le comble le plus généralement employé, et qui est formé de deux pans de bois, également inclinés, s'étendant d'un bout à l'autre du bâtiment, s'appuyant par la base sur deux murs parallèles, et se rencontrant par le haut, suivant une ligne ou arête horizontale qu'on nomme *faîte* du comble ou *faîtage*. Quand le toit n'est formé que d'un pan, il est dit en *appentis*.

L'élément principal d'un comble étant la ferme, voyons en quoi elle contribue à la solidité de l'édifice. La ferme la plus simple est composée de trois pièces, deux arbalêtriers et un tirant, *fig.* 327. Le *tirant* est la pièce horizontale *t*, dans laquelle s'assemblent les deux *arbalêtriers a*. Quelle que soit la charge du toit de la charpente, elle pourra toujours être représentée, sur chaque pan, par une force verticale *p* ou *p'*. Ces deux forces égales ont une résultante qui passe évidemment par le faîte *f*; d'où il suit que ce point est celui qui supporte toute la charge de la toiture. Mais cet effort *r*, à cause de son obliquité par rapport à la direction des arbalêtriers, se décompose en deux autres *s* et *s'*, qui, transportés à l'extrémité inférieure des arbalêtriers, s'y décomposent de nouveau chacun en deux autres forces *m* et *q* ou *m'* et *q'*. Les composantes verticales *q* et *q'* représentent la charge que les murs supportent, et les composantes horizontales *m* et *m'* représentent les efforts produits par la charge pour renverser les murs. La solidité de ces derniers étant supposée suffisante, c'est donc contre les efforts *m* et *m'* qu'il faut lutter pour assurer la solidité de la toiture.

Le tirant a précisément pour seul objet de détruire les efforts *m* et *m'* par son assemblage avec les arbalêtriers; il ne porte aucune charge verticale que son poids entre les points d'appui. Cet assemblage, et par suite, la dimension des arbalêtriers, doit être de force à résister à la poussée *m*. Eu égard à la longueur de l'arbalêtrier, sa section transversale devra être calculée de manière à résister à la pression *p* ou plutôt à sa composante z normale au plan. Ces calculs se feront aisément à l'aide des notions données en mécanique sur la résistance des matériaux.

Le principe des fermes étant posé, voyons comment on modifie ce système pour en augmenter la solidité, l'adapter à une largeur de bâtiment plus ou moins grande, et enfin le rendre propre à recevoir la couverture.

La résultante des efforts se faisant au point *f*, il est essentiel de consolider l'assemblage qui doit s'y trouver. Pour cela, on assemble les deux arbalêtriers dans une pièce verticale P appelée *poinçon*, *fig.* 328. Les différentes fermes sont reliées entr'elles à leur partie supérieure par une pièce horizontale *f* appelée *faîtage*, dans laquelle s'assemblent les poinçons; à la partie inférieure deux autres pièces *s*, *s* également horizontales, nommées *sablières*, sont placées sur les murs verticaux *m* et *m*, et servent à relier les différents tirants, et de plus à recevoir l'assemblage des *chevrons c c*. Ces chevrons doivent supporter immédiatement la couverture. D'un arbalêtrier à l'autre qui lui est parallèle, s'étendent des pièces horizontales *p*, *p*,.... appelées *pannes*, dont le nombre dépend de la largeur du bâtiment. Ces pannes sont fixées sur les arbalêtriers par des tasseaux. Sur les pannes sont appliqués les chevrons, et sur ces chevrons la couverture. La grandeur d'équarrissage des pannes dépend de la distance des fermes.

L'assemblage du poinçon et du tirant a la forme décrite, § 165, *fig.* 315. L'assemblage de l'abalêtrier soit avec le tirant, soit avec le poinçon, est celui décrit, § 165, *fig.* 317.

Le poinçon est donc la pièce qui reçoit la charge des arbalêtriers et de ce qui les recouvre : tout se rattache à cette pièce. Le tirant *t* pouvant fléchir sous son propre poids, et tendre à rapprocher les murs, on le soutient à l'aide d'un étrier qui passe par dessous et se fixe au poinçon à l'aide de boulons.

Le poinçon est assemblé dans le tirant, sans exercer de charge sur lui, il supporte au contraire le tirant : s'il est assemblé, c'est pour qu'il n'oscille pas.

Les pannes et leur charge tendant à faire fléchir les arbalêtriers, pour les soutenir, on fixe deux liens *l, l* sous ces arbalêtriers et à la hauteur des pannes, que l'on assemble dans le poinçon; on reporte ainsi la charge qui produit la flexion, sur le poinçon.

Quelquefois on supprime les liens *l, l* et on leur substitue une pièce horizontale *e* appelée *entrait*, *fig.* 329, soutenue elle-même par des sous-arbalêtriers *a', a'*. Cette disposition a l'avantage de laisser libre tout l'espace renfermé entre le tirant et l'entrait, pour en faire un grenier. Le poinçon est lié à cet entrait et le soutient.

Lorsque le nombre des pannes est assez grand, *fig.* 329, on emploie à la fois pour les soutenir des liens *l, l*, un entrait *e*, et des *contre-fiches n n* inclinées pour qu'elles produisent plus d'effet. On pourrait également y ajouter des *aisselliers a', a'*.

En examinant avec soin le rôle que joue chaque pièce de bois dans la charpente d'un comble, on peut voir que le poinçon, pièce verticale, est, à cause de la direction de ses fibres par rapport à celle de sa charge, dans la position la plus favorable pour résister à cette charge. Il sera toujours possible de calculer sa section, eu égard à cette charge, et aux diverses entailles qu'il doit subir. Les tirants et les entraits sont au contraire dans la position la plus favorable à leur rupture, et l'on ne doit perdre aucune occasion de les rattacher à la partie supérieure de la charpente, et même lorsqu'ils doivent supporter un plancher, et que le bâtiment est trop large, on les soutient avec des colonnes, *fig.* 330. Les arbalêtriers, ces pièces essentielles de la charpente, doivent attirer toute l'attention des constructeurs. Ils doivent être soutenus aux points qui correspondent aux pannes, par des liens et des contre-fiches, qui tous doivent reporter la charge sur le poinçon, sans permettre dans aucun cas qu'une partie de cette charge soit supportée par le tirant.

CHARPENTE DE QUELQUES MACHINES.

§ 172. *Roues d'engrenage.* — Nous n'entrerons ici dans aucun détail relatif, soit au calcul de la force et des dimensions des dents des roues d'engrenage, soit à leur forme; nous renverrons pour cela à notre cours de mécanique; nous nous contenterons d'indiquer la nature des pièces de charpente dont sont composées ces roues.

La *fig.* 331 représente l'engrenage de deux roues cylindriques construites entièrement en bois. Cette forme de roue, sous le nom de *rouet* est souvent employée pour transmettre le mouvement d'une roue hydraulique, sur l'arbre de laquelle elle est montée. Les dents ne font pas corps avec la roue, elles sont rapportées sur la jante dans des mortaises qui y sont creusées, on nomme ces dents des *alluchons*, leur forme est représentée *fig.* 332. La jante *jj* est composée de plusieurs pièces assemblées bout à bout, quelquefois par un tenon fort court, quelquefois aussi par un simple goujon. Cette jante est combinée par entailles peu profondes, et fixée par des boulons, à une enrayure composée de 4 pièces *b*, assemblées à mi-bois, et à entailles réciproques. Ces quatre pièces laissent entr'elles un vide carré, dans lequel entre la partie carrée *c* de l'arbre tournant, portant une embase contre laquelle l'enrayure s'appuie, et où elle est retenue par un coin *d* qui traverse l'arbre.

Les dents doivent être ajustées avec précision dans les mortaises. Elles portent sur leur épaisseur un petit épaulement sur chaque côté qui fixe leur position, et permet de les serrer fortement au moyen d'une clef qui traverse leurs queues. Les dents sont coupées sur leurs bouts par un pan perpendiculaire à leur longueur, qui permet de frapper dessus avec un maillet en bois.

§ 173. *Roues hydrauliques.* — La même disposition est souvent adoptée pour les roues hydrauliques. Quelquefois aussi on relie les jantes à l'arbre à l'aide de rayons. Ce mode d'assemblage est surtout convenable lorsqu'on emploie une charpente en fer.

Nous empruntons au colonel Emy la description d'une roue à aubes courbes en bois, *fig.* 333, composée de cinq couronnes, parallèles *p* dans lesquelles sont assemblées les palettes courbes; ces couronnes, ou plateaux, sont formées de deux épaisseurs de madriers réunis par des vis à bois et de petits boulons, les joints d'une épaisseur répondant au milieu des madriers de l'autre. Les jantes sont reliées à l'arbre par des rayons *r* boulonnés sur leur face, et reçus sur la circonférence de l'arbre dans des anneaux en fonte, centrés sur l'arbre au moyen de coins *c* qui remplissent l'intervalle entre l'arbre et leurs parois intérieures.

Chaque rais est maintenu dans des encastrements formés sur deux rondelles, l'une fixe en façon d'embase *g*, qui fait partie de l'anneau dans lequel passe l'arbre, l'autre mobile *f*, pour qu'elle puisse serrer les raies par le moyen des boulons qui la traversent, ainsi que la rondelle ou embase *g*.

Les tourillons sont en fonte, chacun *t* est fixé à l'arbre par l'intermédiaire d'une embase *m* dont il fait partie, et qui est boulonnée sur l'anneau *g* dans lequel passe le bout de l'arbre. Les coins *c* servent à ajuster les anneaux en fonte de façon que les plateaux soient tous exactement cintrés, les rais dégauchis ainsi que les emplacements des aubes, et pour que la roue tourne *bien rond* sur son axe.

La *fig.* 334 représente aussi une roue hydraulique à la Poncelet; mais entièrement en fer et en fonte, établie aux forges de Guérigny, et qui met en mouvement les laminoirs propres à étirer le fer destiné à la fabrication des câbles. Les trois couronnes *c* sont en tôle et formées de plusieurs segments rivés entr'eux comme le montre la figure. Ces couronnes sont montées sur des bras ou croisillons *b* en fer forgé, sur lesquels elles sont aussi fixées par deux rangs de rivets. Pour former l'assemblage des aubes sur les couronnes, on a employé des tasseaux en fonte *t* qui prennent la courbure des aubes, et que l'on fixe par quatre rivets contre les faces intérieures des couronnes; à chacun de ces tasseaux sont ménagées des oreilles sur lesquelles on boulonne les bords des feuilles de tôle qui composent les aubes ; les huit bras sont ajustés sur des plateaux en fonte *n*, en laissant de chaque côté de leur largeur, un vide étroit dans lequel on chasse des clavettes composées d'acier et de fer. On les fixe ensuite avec deux boulons, et pour les consolider, on les relie vers le milieu par des octogones *o* en fer; les plateaux *n* sont retenus par des clavettes sur l'arbre en fer carroyé *p*.

§ 174. *Grues en bois.* — On sait que les grues sont destinées à soulever de lourds fardeaux, et à les transporter d'un point à un autre, dans un certain rayon.

Les grues des fonderies peuvent être faites en bois. Sans entrer dans les détails de leur construction, nous dirons qu'elles sont généralement composées d'un arbre *a fig.* 335 qui pivote à la partie inférieure sur une crapaudine, et tourne à la partie supérieure, dans un collier. Dans cet arbre sont assemblées, soit en le moisant, soit à tenon et mortaise, deux bras parallèles *b*, formant la *volée* de la grue, à l'extremité desquels est placé le poids à soulever. Les efforts supportés par ces pièces, sont reportés à l'aide de jambes de force *j*, sur l'arbre vertical.

Les grues de quai peuvent être construites comme l'indique la figure 336, dans laquelle l'arbre est noyé dans la maçonnerie, le pivot étant toujours placé à la partie inférieure. Il porte en *b* un anneau en fonte autour duquel se trouvent disposés des galets qui le maintiennent dans sa position verticale. La volée *v* est assemblée dans l'arbre avec embrèvement, et moisée ainsi que l'arbre, à la partie supérieure, par deux arcs-boutants *d*, fixés sur l'arbre par plusieurs boulons.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS CE VOLUME.

COURS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

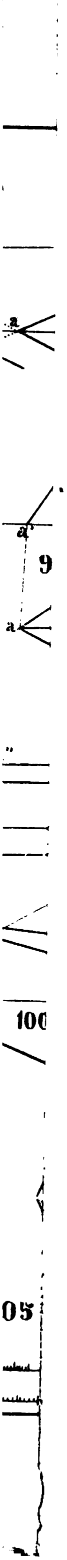
DES POLYÈDRES.

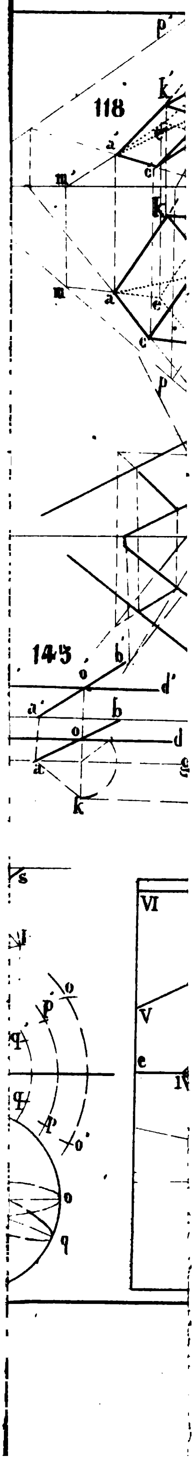
DES SURFACES COURBES. — NOTIONS GÉNÉRALES.

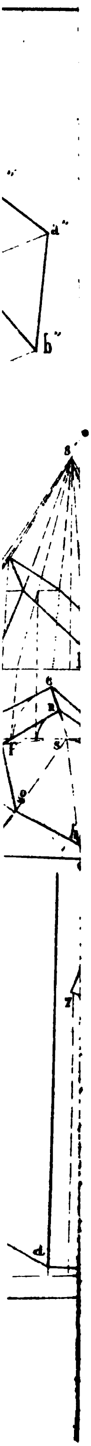
DES SURFACES CYLINDRIQUES.

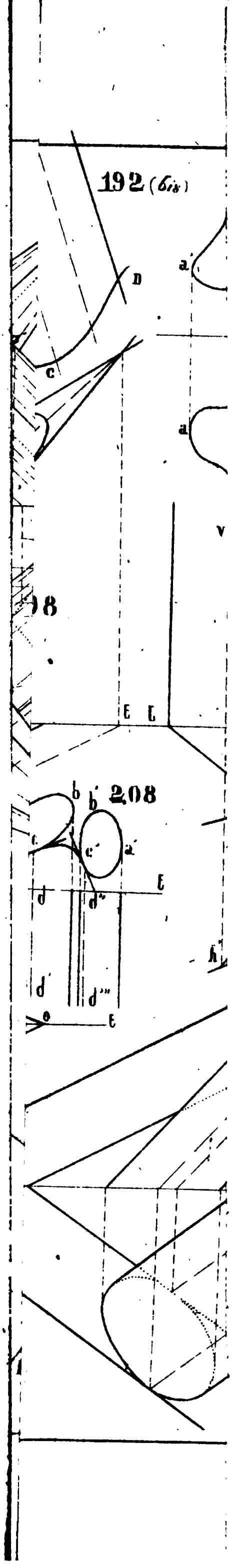
DES SURFACES CONIQUES.

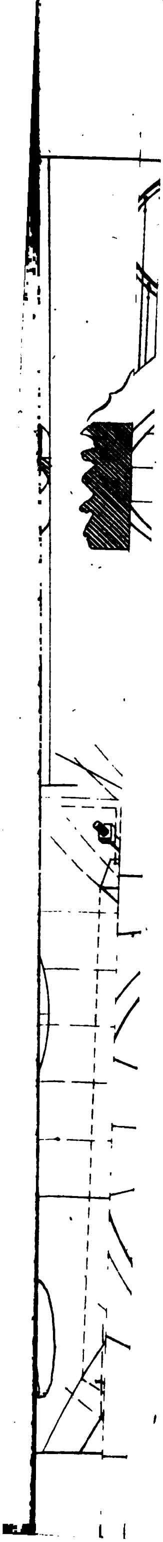
FIN DE LA TABLE.


a
a'
9
a
100
05

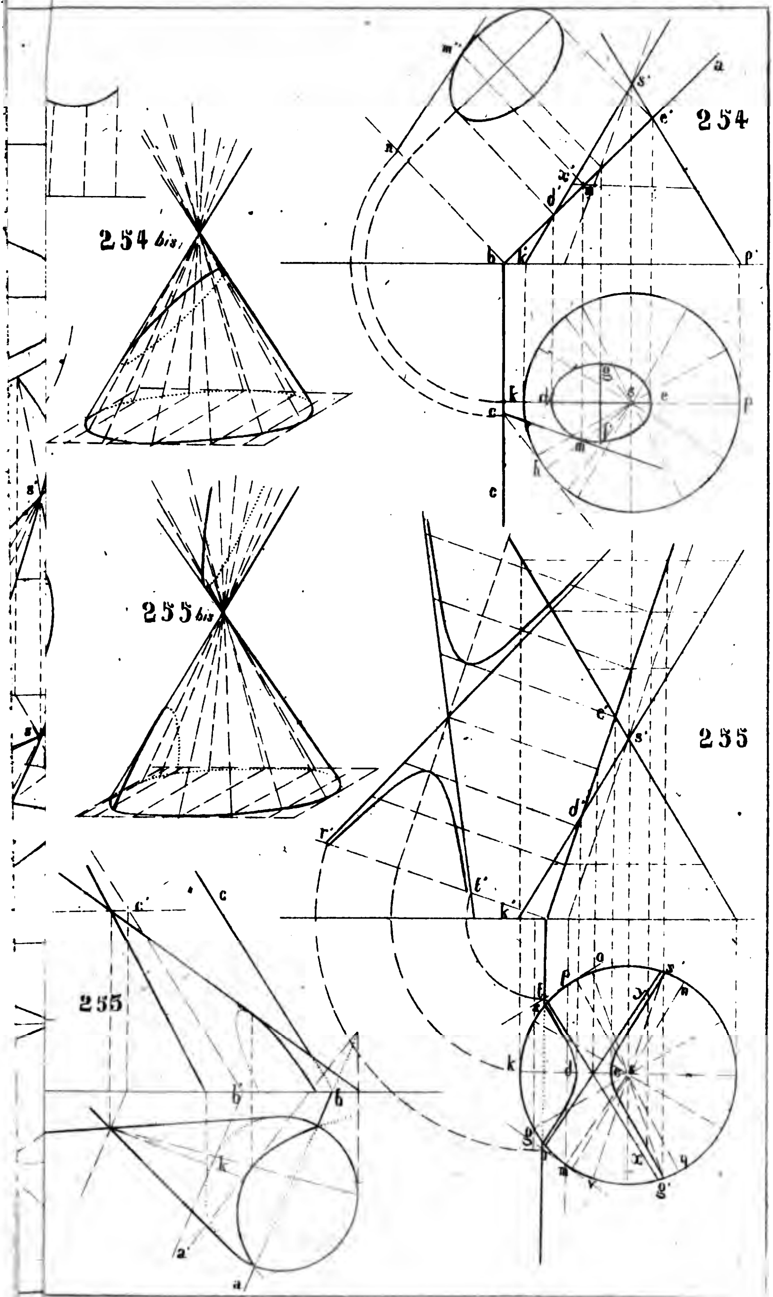

118
145
VI
V
IV




192 (bis)
208
98

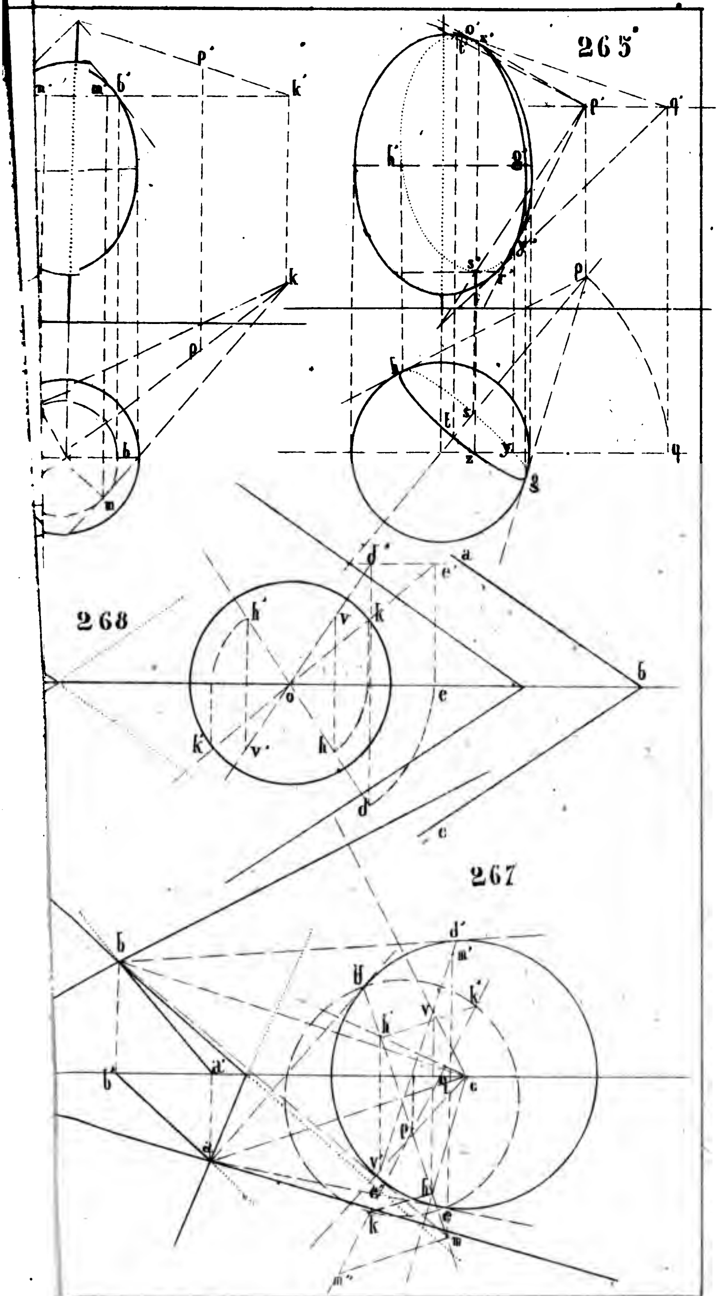


PL. VIII

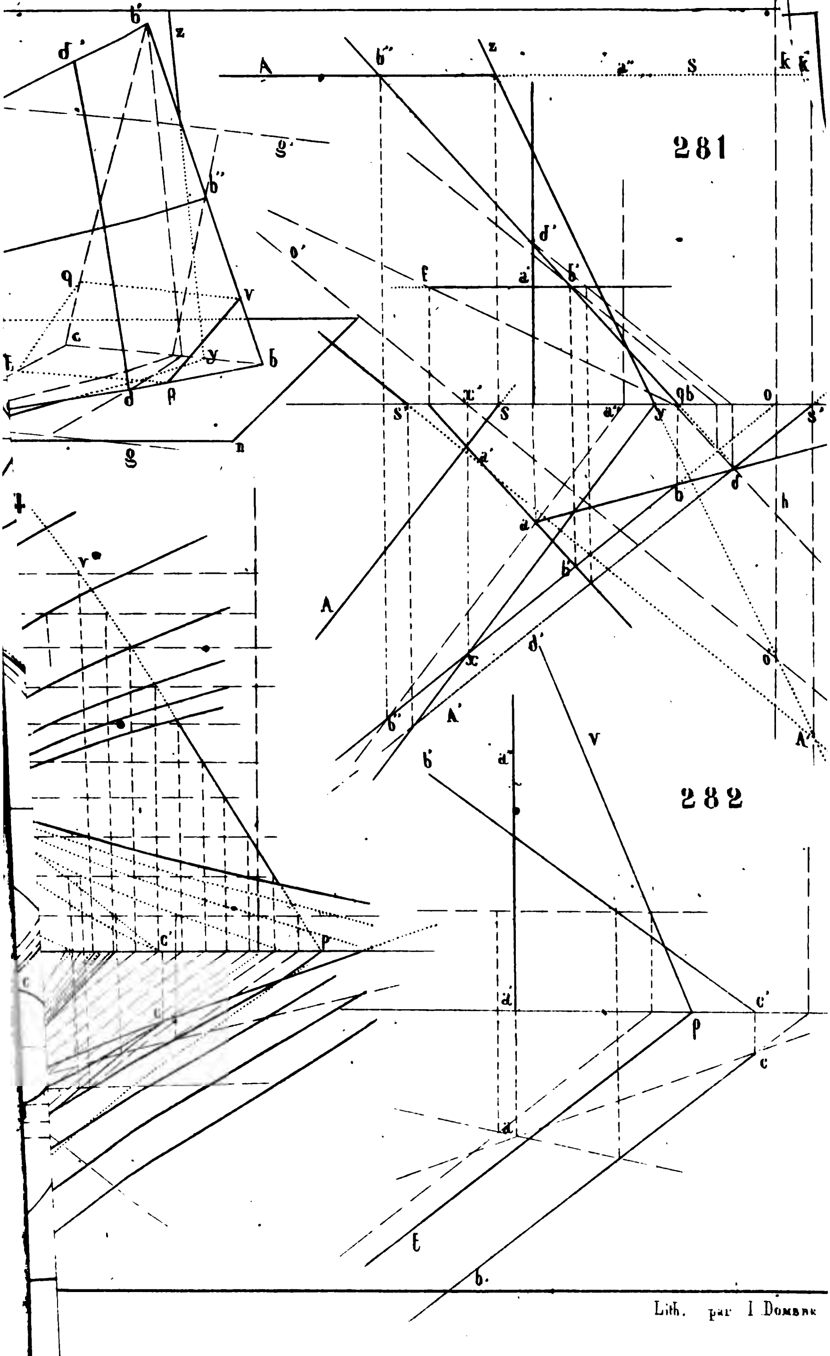


Lithographié par I. Demane

PL. IX

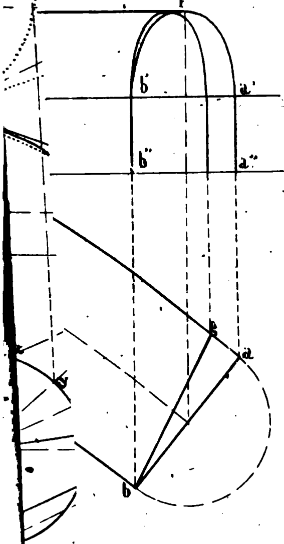


Lithographié par J. Domnac

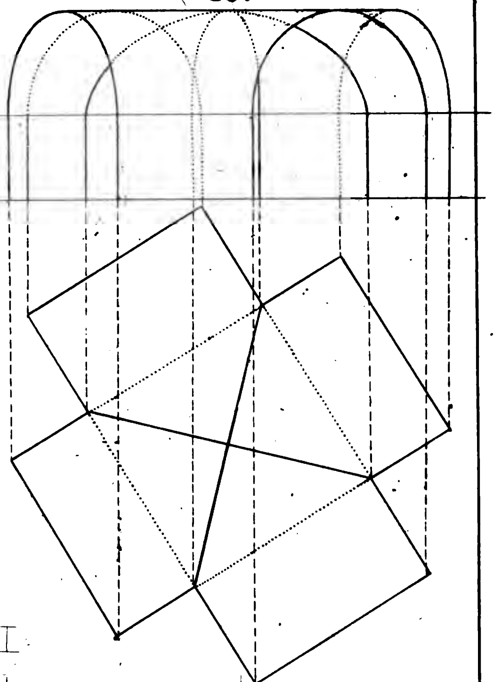


Lith. par I. Dombre

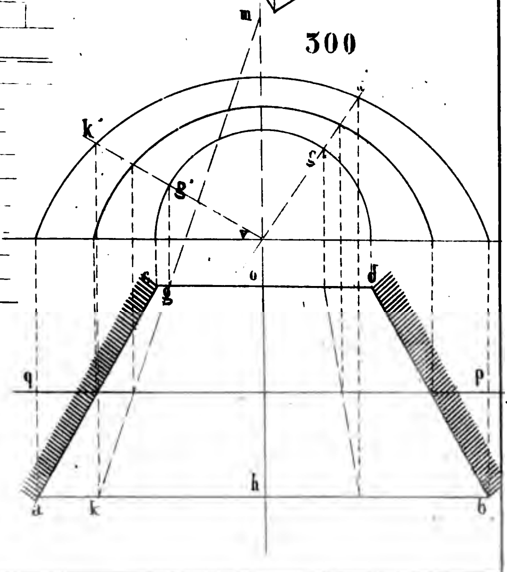
287



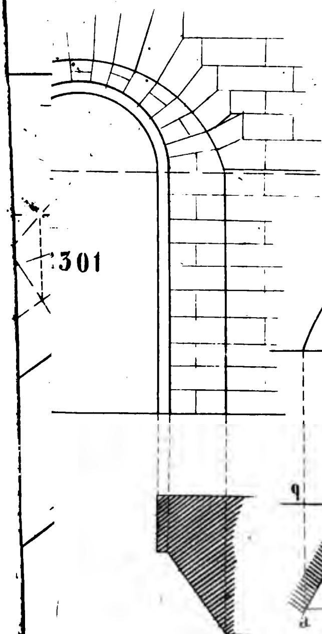
289



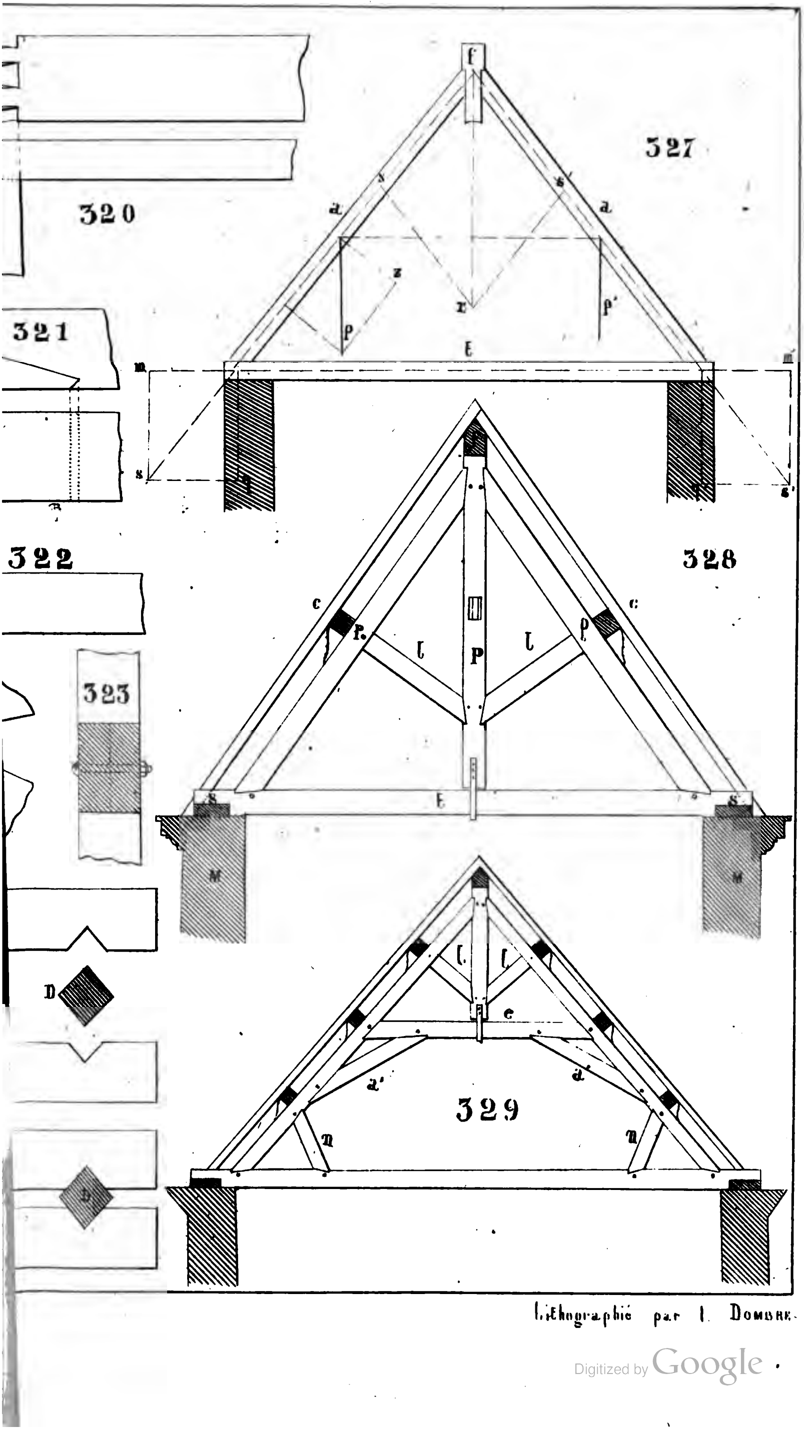
300



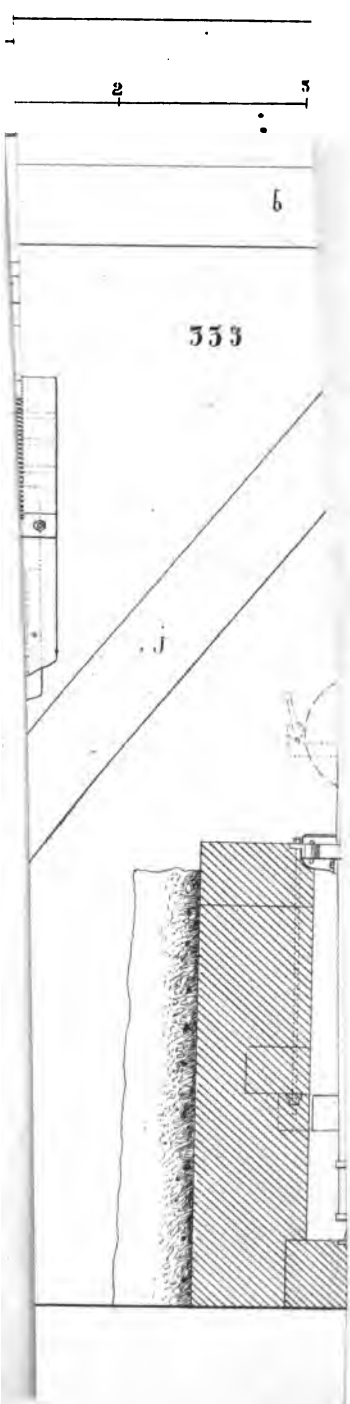
301



Lithographié par I. Dombre



Lithographié par I. Dombre.


2
3
b
333
j